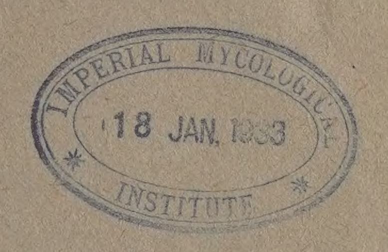
1931 № 9

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК

СОЮЗА СОВЕТСКИХ СОЦИАЛИСТИЧЕСКИХ РЕСПУБЛИК

VII СЕРИЯ

ОТДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ И ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК



BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES

DE L'UNION DES RÉPUBLIQUES SOVIÉTIQUES SOCIALISTES

VII SÉRIE

CLASSE DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET NATURELLES

ЛЕНИНГРАД — LENINGRAD
ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

ПРИМЕР СТАНДАРТНОЙ ЦИТАТЫ · EXEMPLE DE CITATION

Г. П. Барсанов. Нижний кембрий в Закавказьи. ИМЕН, 1931, № 9, стр. 1255.

G. Barsanov. Le cambrien inférieur dans la Transcaucasie.
BAS-MN, 1931, № 9, p. 1255 (en russe).

Напечатано по распоряжению Академии Наук СССР

Декабрь 1931 г.

Непременный Секретарь академик *В. Волгин*

Редактор издания академик-секретарь ОМЕН А. А. Борисяк

Технический редактор Л. А. Федоров

Ученый корректор Г. А. Стратановский

Сдано в набор в августе 1931 г. — Подписано к печати 10 декабря 1931 г.

124 (1151—1274) стр. (10 фиг.) + 2 табл. — $Б_5$. — $8^2/_8$ печ. л. — 40000 тип. зн. — Тираж 1300

Ленинградский областлит № 28419. — АНИ № 151. — Заказ № 1754

Типография Академии Наук СССР. В. О., 9 линия, 12

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

SUR UNE CLASSE DE FORMULES D'INTERPOLATION

Par SERGE BERNSTEIN

1. Il est connu qu'aucune distribution des noeuds dans les polynômes d'interpolation de Lagrange ne peut garantir la convergence de ces polynômes dans le cas d'une fonction continue absolument arbitraire.

J'ai donné successivement* deux procédés différents pour remédier à cet incovenient en remplaçant les polynômes de Lagrange par des polynômes de degré un peu supérieur correspondant aux mêmes noeuds. Je voudrais développer ici quelques remarques concernant le second de ces procédés que j'ai indiqué incidemment dans les articles cités.

Le problème d'interpolation trigonométrique étant équivalent à celui de l'interpolation par polynômes, c'est le premier que nous considérerons, pour fixer les idées.

Soit $f(\theta)$ une fonction continue périodique de période 2π donnée en $2m+1$ points équidistants de cet intervalle

$$\theta_k = \frac{2k\pi}{2m+1},$$

où $k=0, 1, \ldots, 2m$. Formons la somme trigonométrique $P_n(\theta)$ d'ordre

$$m+h=n$$

$$P_n(\theta) = \frac{1}{(2m+1)(2h+1)} \sum_0^{2m} \frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\theta-\theta_k)\sin\frac{2h+1}{2}(\theta-\theta_k)}{\sin^2\frac{\theta-\theta_k}{2}} f(\theta_k) \quad (h \geqslant m) \quad (1)$$

* Sur une modification de la formule d'interpolation de Lagrange. Comm. Soc. Math. Kharkow, t. V (1931); Sur une formule d'interpolation de M. de la Vallée Poussin, ibid.

qui satisfait manifestement à la condition que

$$P_n(\theta_k) = f(\theta_k), \qquad (k=0, 1, \ldots, 2m).$$

De plus, en écrivant

$$P_n(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_1^n A_i \cos i\theta + B_i \sin i\theta, \tag{2}$$

on trouve, en tenant compte de l'identité

$$\frac{\sin\frac{2m+1}{2}\theta \sin\frac{2h+1}{2}\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}} = 2h + 1 +$$

$$+ 2\{[2h+1][\cos\theta + \ldots + \cos(m-h)\theta] + 2h\cos(m-h+1)\theta +$$

$$+ \ldots + 2\cos(m+h-1)\theta + \cos(m+h)\theta\}$$

que

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} A_i = \dfrac{2}{2m+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{2m} f(\theta_k)\cos i\theta_k \\ B_i = \dfrac{2}{2m+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{2m} f(\theta_k)\sin i\theta_k \end{array}\right\} i \leqslant m-h \\ \left.\begin{array}{l} A_i = \dfrac{2}{2h+1}\cdot\dfrac{n+1-i}{2m+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{2m} f(\theta_k)\cos i\theta_k \\ B_i = \dfrac{2}{2h+1}\cdot\dfrac{n+1-i}{2m+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{2m} f(\theta_k)\sin i\theta_k \end{array}\right\} m-h < i \leqslant n \end{array}\right\}. \tag{3}$$

Observons que les cas extrêmes, où $h=0$, $h=m$, correspondent, respectivement, à la formule classique de Lagrange, et à la formule de M. Jackson.* Toutes les formules intermédiaires, où $0 < h < m$, sont

* Jackson. A formula of trigonometric interpolation. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 1914; S. Bernstein. Sur le convergence absolue des séries trigonométriques. C. R. Paris, Juin, 1914, et en russe: Об абсолютной сходимости тригонометрических рядов. Comm. Soc. Math. Kharkow, t. XIV, 1914.

caractérisées par le fait que les coefficients de $P_n(\theta)$, pour $i \leqslant m - h$, sont identiques à ceux de la formule correspondante de Lagrange, les autres coefficients satisfaisant deux à deux aux idéntités

$$(n+1-j)\,A_i = (n+1-i)\,A_j, \quad (n+1-j)\,B_i = -(n+1-i)\,B_j \tag{4}$$

lorsque $i + j = 2m + 1$.

On peut remarquer aussi, que pour $m - h < i \leqslant m$, on a

$$A_i = \frac{n+1-i}{2h+1} A_i^0, \quad B_i = \frac{n+1-i}{2h+1} B_i^0 \tag{5}$$

si l'on désigne par A_i^0, B_i^0 les coefficients correspondants de la formule classique de Lagrange; et ensuite les coefficients correspondant à $m < i \leqslant n$ se déduisent des formules (4).

Il est essentiel de noter que, d'après ce qui précède, les sommes trigonométriques interpolatrices $P_{m+h}(\theta)$ dans le cas où $f(\theta)$ est une somme trigonométrique d'ordre non supérieur à $m - h$ sont identiques à ces dernières: $P_{m+h}(\theta) = f(\theta)$.

Montrons à présent que l'on a

$$|P_{m+h}(\theta)| \leqslant \sqrt{\frac{2m+1}{2h+1}}\, M, \tag{6}$$

si

$$|f(\theta_k)| \leqslant M. \tag{7}$$

A cet effet, observons d'abord que

$$\frac{1}{(2m+1)(2h+1)} \sum_{0}^{2m} \frac{\sin^2 \frac{2h+1}{2}(\theta - \theta_k)}{\sin^2 \frac{\theta - \theta_k}{2}} = 1, \tag{8}$$

car la somme trigonométrique considérée étant au plus de l'ordre h et ne changeant pas de valeur, lorsqu'on remplace θ par $\theta + \frac{2\pi}{2m+1}$, doit se réduire à une constante C; cette constante C qui est la somme des termes constants de chaque terme de (8) tous égaux à $\frac{1}{2m+1}$, est donc égale à

$$\frac{2m+1}{2m+1} = 1.$$

Par conséquent, en vertu de l'inégalité

$$\sum_0^{2m}\left|\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\theta-\theta_k)\sin\frac{2h+1}{2}(\theta-\theta_k)}{\sin^2\frac{\theta-\theta_k}{2}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\sum_0^{2m}\frac{\sin^2\frac{2m+1}{2}(\theta-\theta_k)}{\sin^2\frac{\theta-\theta_k}{2}}\sum_0^{2m}\frac{\sin^2\frac{2h+1}{2}(\theta-\theta_k)}{\sin^2\frac{\theta-\theta_k}{2}}}=$$

$$=(2m+1)\sqrt{(2m+1)(2h+1)},$$

on a

$$|P_{m+h}(\theta)|\leqslant\sqrt{\frac{2m+1}{2h+1}}M. \tag{6}$$

Le signe d'égalité ne pourra ici être réalisé que pour $h=m$. Mais pour le cas, où

$$N=\frac{2m+1}{2h+1}$$

est un nombre entier, nous donnerons une limite supérieure de $|P_{m+h}(\theta)|$ qui pourra effectivement être atteinte.

Si

$$|f(\theta_k)|\leqslant 1, \tag{7bis}$$

on a, en supposant que $N=\frac{2m+1}{2h+1}$ est un nombre entier,

$$|P_{m+h}(\theta)|\leqslant L=\frac{1}{N}\left[\frac{1}{\sin\frac{\pi}{2N}}+\frac{1}{\sin\frac{3\pi}{2N}}+\ldots+\frac{1}{\sin\frac{2N-1}{2N}\pi}\right]. \tag{9}$$

En effet, posons $k=\lambda N+\rho$, où λ et $\rho<N$ sont deux nombres entiers positifs, et soit $z_k=\theta-\theta_k$; nous aurons donc

$$\frac{1}{(2m+1)(2h+1)}\sum_{k=0}^{2m}\frac{\left|\sin\frac{2m+1}{2}z_k\sin\frac{2h+1}{2}z_k\right|}{\sin^2\frac{z_k}{2}}=$$

$$=\frac{\left|\sin\frac{2m+1}{2}z_0\right|}{(2m+1)(2h+1)}\sum_{\rho=0}^{N-1}\sum_{\lambda=0}^{2h}\frac{\left|\sin\frac{2h+1}{2}\left(z_0+\frac{2\rho\pi}{2m+1}\right)\right|}{\sin^2\frac{1}{2}\left(z_0+\frac{2\rho\pi}{2m+1}+\frac{2\lambda\pi}{2h+1}\right)}=$$

$$=\frac{2h+1}{2m+1}\left|\sin\frac{2m+1}{2}z_0\right|\sum_{\rho=0}^{N-1}\frac{1}{\left|\sin\frac{2h+1}{2}\left(z_0+\frac{2\rho\pi}{2m+1}\right)\right|}=$$

$$=\left|\frac{\sin\frac{N}{2}\varphi}{N}\right|\sum_{\rho=0}^{N-1}\frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\rho\pi}{N}\right)\right|}\leqslant\frac{1}{N}\sum_{\rho=0}^{N-1}\frac{1}{\sin\frac{2\rho+1}{2N}\pi}, \tag{10}$$

le maximum absolu de cette somme étant manifestement atteint pour

$$\varphi=(2h+1)z_0=\frac{\pi}{N}\cdot$$

Il est fort remarquable que la somme trigonométrique $P_{m+h}(\theta)$ qui réalise l'extremum est de l'ordre de $m-h$ seulement, de sorte que notre proposition peut être complétée de la façon suivante:

Si une somme trigonométrique $S_{m-h}(\theta)$ d'ordre $m-h$ ne dépasse pas 1 en valeur absolue en $2m+1$ équidistants

$$\theta_k=\frac{2k\pi}{2m+1},$$

on a pour toute valeur de θ

$$|S_{m-h}(\theta)|\leqslant L=\frac{1}{N}\sum_{\rho=0}^{N-1}\frac{1}{\sin\frac{2\rho+1}{2N}\pi}, \tag{9bis}$$

pourvu que

$$N=\frac{2m+1}{2h+1}$$

soit un nombre entier, la valeur L pouvant effectivement être atteinte, si

$$S_{m-h}(\theta)=\frac{\sin\frac{2m+1}{2}\theta}{N}\sum_{\rho=0}^{N-1}\frac{1}{\sin\frac{2h+1}{2}(\theta-\theta_\rho)}. \tag{11}$$

Il suffit d'observer que

$$S_{m-h}(\theta_k)=(-1)^{k+\lambda}=(-1)^\rho\ (\text{où } k=\lambda N+\rho)$$

et que le second membre se réduit à L pour

$$\theta=\frac{2N-1}{2m+1}\pi.$$

L'inégalité (6) permet d'établir la convergence de la formule d'interpolation (1), quelle que soit la fonction continue $f(\theta)$, pourvu que $\frac{2m+1}{2h+1}$ ne croisse pas infiniment.

Soit, en effet,

$$\rho_n = \max|P_n(\theta) - f(\theta)|;$$

où $P_n(\theta)$ est donné par la formule (1), soit d'autre part

$Q_{m-h}(\theta)$ le polynôme trigonométrique d'approximation de $f(\theta)$ d'ordre $m-h$, et $E_{m-h}(f(\theta))$ la meilleure approximation correspondante.

D'après ce qui précède, si on remplace dans le formule (1) $f(\theta_k)$ par $Q_{m-h}(\theta_k)$, on retrouve au premier membre $Q_{m-h}(\theta)$; par conséquent,

$$P_n(\theta) = Q_{m-h}(\theta) +$$

$$+\frac{1}{(2m+1)(2h+1)}\sum_0^{2m}\frac{\sin\frac{2m+1}{2}(\theta-\theta_k)\sin\frac{2h+1}{2}(\theta-\theta_k)}{\sin^2\frac{\theta-\theta_k}{2}}[f(\theta_k) - Q_{m-h}(\theta_k)];$$

d'où, d'après (6),

$$|P_n(\theta) - Q_{m-h}(\theta)| < \sqrt{\frac{2m+1}{2h+1}}E_{m-h}[f(\theta)].$$

Donc,

$$\rho_n < E_{m-h}[f(\theta)]\left[\sqrt{\frac{2m+1}{2h+1}}+1\right], \tag{12}$$

ce qui prouve notre affirmation.

Bien entendu, en utilisant (9) au lieu de (6) on pourrait améliorer l'évaluation de l'erreur ρ_n de la formule (1), car il est aisé de voir que

$$L \sim \frac{2}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2N}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dz}{\sin z} \sim \frac{2}{\pi}\log N, \tag{13}$$

lorsque $N \to \infty$. On en conclut, en particulier, que même, pour $N \to \infty$, la formule (1) converge, lorsque $f(\theta)$ satisfait à la condition de Dini-Lipschitz.

J'observerai que toutes les conclusions se conservent, si la formule (1) est remplacée par

$$P_n(\theta) = \frac{1}{4mh} \sum_{0}^{2m-1} \frac{\sin m(\theta - \theta_k) \sin h(\theta - \theta_k)}{\sin^2 \frac{\theta - \theta_k}{2}} f(\theta_k), \qquad (1\text{bis})$$

où

$$\theta_k = \frac{k\pi}{m} \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2m-1),$$

et

$$n = m + h - 1$$

2. J'ajouterai encore une proposition qui se ratache au même ordre d'idées:

Si une somme trigonométrique $S_n(\theta)$ d'ordre n atteint son maximum absolu M dans l'intervalle $(0, \alpha)$, où $\alpha < \frac{\pi}{n}$, on a l'inégalité

$$M \leqslant \frac{\sqrt{S_n^2(0) + S_n^2(\alpha) - 2S_n(0)\,S_n(\alpha)\cos n\alpha}}{\sin n\alpha} \qquad (14)$$

le signe d'égalité ayant lieu pour

$$S_n(\theta) = \frac{S_n(\alpha)\sin n\theta + S_n(0)\sin n(\alpha - \theta)}{\sin n\alpha}.$$

Montrons d'abord que le valeur de M est bornée supérieurement. A cet effet, formons le somme d'ordre n $Q_n(\theta)$ qui s'écarte le moins de zéro parmi celles qui satisfont aux deux conditions

$$Q_n(0) = 0, \quad Q_n(\theta_0) = 1,$$

où

$$\theta_0 \leqslant \frac{\pi}{2n}.$$

On aura manifestement

$$Q_n(\theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin n\theta_0}$$

et l'écart minimum est

$$L = \frac{1}{\sin n\theta_0}; \qquad (15)$$

car, s'il existait une somme $\varphi_n(\theta)$, telle que $|\varphi_n(\theta)| < L$, la somme d'ordre u

$$R_n(\theta) = \frac{\sin n\theta}{\sin n\theta_0} - \varphi_n(\theta),$$

qui s'annulle aux points 0 et $\theta_0 < \frac{\pi}{2n}$, aurait encore $2n - 1$ racines supérieures à $\frac{\pi}{2n}$ entre les $2n$ points $\frac{2k+1}{2n}\pi$, où $P_n(\theta)$ aurait des signes opposés.

Ainsi, la distance du maximum absolu d'une somme $Q_n(\theta)$ d'ordre n à une racine de $Q_n(\theta) = 0$ n'est pas inférieure à $\frac{\pi}{2n}$.

Il en résulte que les maxima absolus de

$$|S_n(\theta) - S_n(0)| \quad \text{et} \quad |S_n(\theta) - S_n(\alpha)|$$

sont, respectivement, atteints à l'extérieur des intervalles

$$\left(0, \frac{\alpha}{2}\right) \text{ et } \left(\frac{\alpha}{2}, \alpha\right);$$

donc, en vertu de (15), en supposant

$$|S_n(0)| \leqslant 1, \quad |S_n(\alpha)| \leqslant 1,$$

on aura

$$M + 1 > \frac{M - 1}{\sin \frac{n\alpha}{2}};$$

d'où

$$M < \frac{1 + \sin \frac{n\alpha}{2}}{1 + \sin \frac{n\alpha}{2}}.$$

La valeur de M étant bornée, il existe par conséquent une somme $S_n(\theta)$ pour laquelle M atteint son maximum.

Je dis que le nombre k des points $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_k$ d'écart maximum (de signe successivement opposé) de cette somme $S_n(\theta)$ extérieurs à $(0, \alpha)$ est au moins $2n - 1$.

En effet, soit $\theta_0 < \alpha$ un point intérieur de l'intervalle $(0, \alpha)$, où

$$|S_n(\theta_0)| = M$$

et soit $S_n(\theta_1) > 0$, pour fixer les idées. Examinons d'abord l'hypothèse de k pair (inférieur à $2n-1$); alors la somme trigonométrique

$$\varphi(\theta) = \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta-\beta_0}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\beta_1}{2}\cdots\sin\frac{\theta-\beta_{k-1}}{2}$$

d'ordre $\frac{k+2}{2} \leqslant n$, où

$$\beta_0 < \alpha \text{ et } \theta_1 < \beta_1 < \theta_2 < \cdots < \beta_{k-1} < \theta_k$$

aura des signes opposés à ceux de $S_n(\theta)$ aux points θ_i $(i > 0)$, et on pourra disposer de β_0 pour avoir $S_n(\theta_0)\varphi(\theta_0) > 0$. Donc, $\lambda > 0$ étant suffisamment petit, la somme

$$S_n(\theta) + \lambda\varphi(\theta)$$

aurait son maximum absolu à l'intérieur de $(0, \alpha)$ supérieur à M.

De même, si $k < 2n-1$ était impair, il suffirait de former la somme

$$S_n(\theta) + \lambda\varphi(\theta)\sin\frac{\theta-\beta_k}{2},$$

où $\beta_k > \theta_k$ d'ordre non supérieur à n car $\frac{k+3}{2} \leqslant n$,

pour s'assurer de l'impossibilité de cette autre hypothèse.

Par conséquent, la maximum absolu de $|S_n(\theta)|$ est atteint au moins en $2n$ points; donc, d'après la remarque faite plus haut, la distance entre deux de ses racines successives est égale à $\frac{\pi}{n}$, et par conséquent, on a nécessairement

$$S_n(\theta) = M_0 \cos n(\theta + c), \tag{16}$$

où les constantes M_0 et c se déterminent au moyen des valeurs données $S_n(0)$ et $S_n(\alpha)$.

Ainsi, on a

$$M_0 \cos nc = S_n(0), \quad M_0 \cos n(\alpha + c) = S_n(\alpha),$$

d'où

$$S_n(\theta) = S_n(0)\cos n\theta + \frac{S_n(\alpha) - S_n(0)\cos n\alpha}{\sin n\alpha}\sin n\theta. \tag{17}$$

Donc,

$$M_0 = \frac{\sqrt{S_n^2(0) + S_n^2(\alpha) - 2S_n(0)\,S_n(\alpha)\cos n\alpha}}{\sin n\alpha} \qquad \left(\alpha < \frac{\pi}{n}\right) \tag{18}$$

et on a effectivement

$$M \leqslant M_0. \tag{14bis}$$

c. q. f. d.

En particulier, si

$$S_n(0) = S_n(\alpha) = 1,$$

on a

$$M \leqslant \frac{1}{\cos\frac{n\alpha}{2}}, \quad \left(\alpha < \frac{\pi}{n}\right) \tag{19}$$

l'égalité ayant lieu pour

$$S_n(\theta) = \frac{\cos n\left(\theta - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{n\alpha}{2}}.$$

Dans ce cas, le maximum absolu est effectivement atteint pour $\theta = \frac{\alpha}{2}$ entre 0 et α.

Mais le raisonnement précédent ne prouve aucunement qu'il doit exister une somme trigonométrique $S_n(\theta)$ prenant des valeurs données quelconques $S_n(0)$ et $S_n(\alpha)$ et ayant son maximum absolu M dans l'intervalle $(0, \alpha)$. Nous avons montré seulement que si une telle somme d'ordre n existe, la somme qui conduit à la plus grande valeur M_0 de ce maximum absolu M est donnée par la formule (17).

Par conséquent, la condition nécessaire et suffisante pour que le maximum absolu puisse être atteint dans l'intervalle $(0, \alpha)$ est que le maximum de (17) se trouve dans cet intervalle.

Donc, pour que le maximum absolu de $S_n(\theta)$ puisse être atteint dans l'intervalle $(0, \alpha)$ il faut et il suffit: que l'on ait en même temps les deux inégalités

$$\frac{S_n(\alpha)}{S_n(0)} \geqslant \cos n\alpha, \quad \frac{S_n(0)}{S_n(\alpha)} \geqslant \cos n\alpha, \tag{20}$$

si

$$\alpha \leqslant \frac{\pi}{2n};$$

que l'une, au moins, des inégalités (20) soit remplie, si

$$\alpha > \frac{\pi}{2n}.$$

Par exemple, si on a $S_n(\alpha) = 1$, $S_n(0) = -\rho$, où $0 < \rho < 1$, le maximum absolu de $S_n(\theta)$ ne pourrait être dans l'intervalle $(0, \alpha)$ que pour $\alpha \geqslant \frac{1}{n} \arccos(-\rho)$.

Corollaire. Si on a

$$|S_n(0)| \leqslant 1, \quad |S_n(\alpha)| \leqslant 1, \tag{21}$$

où $\alpha < \frac{\pi}{n}$, le maximum absolu M de $|S_n(\theta)|$ étant atteint dans $(0, \alpha)$, on a

$$M \leqslant \frac{1}{\cos\frac{n\alpha}{2}}. \tag{19}$$

Cela est évident pour $\alpha \geqslant \frac{\pi}{2n}$, car le maximum de (18), sous les conditions (21), est réalisé pour $S_n(0) = S_n(\alpha) = 1$; mais, grâce aux inégalités (20), pour $\alpha < \frac{\pi}{2n}$, la conclusion subsiste également.

On peut tirer de (19) la conséquence suivante:

Si $|S_n(\theta_k)| \leqslant 1$ en $2\lambda n$ points

$$\theta_k = \frac{k\pi}{\lambda n}$$

équidistants, où $\lambda > 1$, on a pour toute valeur de θ

$$|S_n(\theta)| \leqslant \frac{1}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}. \tag{22}$$

D'ailleurs, le signe d'égalité sera effectivement réalisé pour λ entier par la somme

$$S_n(\theta) = \frac{\cos\left(n\theta - \frac{\pi}{2\lambda}\right)}{\cos\frac{\pi}{2\lambda}}$$

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ПРИБЛИЖЕНИИ К ФУНКЦИЯМ ПОСРЕДСТВОМ ПОЛИНОМОВ С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Л. В. КАНТОРОВИЧА

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

С. Н. Бернштейн * поставил вопрос о том, в какой мере ухудшает требование целых коэффициентов у апроксимирующих полиномов, порядок наилучшего приближения. В частности, в цитированной статье автор показал что приближение к функции, удовлетворяющей условию Липшица, в промежутке $(\alpha, 1-\alpha)$ $\left[0<\alpha<\frac{1}{2}\right]$, многочленами с целыми коэффициентами, имеет порядок $\left(\frac{1}{n}\right)$, одинаковый с наилучшим. Некоторые интересные результаты по этому же вопросу получены Р. О. Кузьминым.**

В настоящей заметке мы хотим указать на некоторые относящиеся сюда результаты которые получаются непосредственно из рассмотрения полиномов в форме С. Н. Бернштейна.

Как известно, всякий полином, степени n, может быть представлен в форме С. Н. Бернштейна:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \varphi_{k,n},$$

где $\varphi_{k,n}$ некоторые действительные числа. Заметим, что числа $C_n^k \varphi_{k,n}$ целые в том и только в том случае, когда все a_k целые, таким образом, рас-

* См. ДАН-А, 1930, № 16, стр. 411.

** См. Тр. Всесоюзн. мат. съезда в Харькове. В этой работе автор занимается задачей приближения к иррациональному числу полиномами с целыми коэффициентами. Как указал Р. О. Кузьмин, этим же методом может быть получена теорема I настоящей заметки с несколько худшей оценкой.

смотрение полиномов в обычной форме с целыми a_k равносильно рассмотрению полиномов в форме Бернштейна с целыми $C_n^k \varphi_{k,n}$.

Обозначим через E_n наилучшее приближение к функции в данном промежутке посредством полиномов с произвольными коэффициентами и через E_n^e наилучшее приближение полиномами с целыми коэффициентами. Тогда можем высказать следующее предложение.

Теорема I. *Если $f(x)$ функция ограниченная в промежутке*

$$(\alpha,\ 1-\alpha),\ 0 < \alpha < \frac{1}{2},$$

то для этого промежутка

(1) $$E_n^e = E_n + 0\,[(1-\alpha)^n],$$

т. е. разница между E_n^e и E_n имеет порядок прогрессии.

Доказательство. По определению E_n существует такой полином $P_n(x)$ степени не выше n, что в промежутке $(\alpha, 1-\alpha)$

(2) $$|P_n(x) - f(x)| \leqslant E_n.$$

Представим полином $P_n(x)$ в форме С. Н. Бернштейна:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \varphi_{k,n}.$$

Определим теперь полином $Q_n(x)$ с целыми коэффициентами положив:

$$Q_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k (1-x)^{n-k} [C_n^k \varphi_{k,n}],^*$$

тогда в промежутке $(0,\ 1)$

$$|P_n(x) - Q_n(x)| =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} x^k (1-x)^{n-k} \{C_n^k \varphi_{k,n} - [C_n^k \varphi_{k,n}]\} < \sum_{k=0}^{n} x^k (1-x)^{n-k}.$$

* Выражение $[C_n^k \varphi_{k,n}]$ обозначает целую часть числа $C_n^k \varphi_{k,n}$.

Последнее выражение достигает на концах промежутка максимума равного по величине

$$(1-\alpha)^n \frac{1-\alpha}{1-2\alpha}\left[1-\left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{n+1}\right],$$

откуда

(3) $$|P_n(x)-Q_n(x)| = 0\,((1-\alpha)^n).$$

Наконец из (2) и (3) находим (1), так как

$$|Q_n(x)-f(x)| \leqslant |P_n(x)-f(x)| + |P_n(x)-Q_n(x)|.$$

Следствие. *Если* $f(x)$ *функция нерегулярная в эллипсе с фокусами в* $(\alpha, 0)$ *и* $(1-\alpha, 0)$ *и полусуммой осей равной* $\frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)}$, *то* E_n^e *для промежутка* $(\alpha, 1-\alpha)$ *имеет тот же порядок, что и* E_n, *т. е.*

(4) $$\varliminf_{n\to\infty} \frac{E_n^e}{E_n} = 1.$$

Для доказательства (4) в силу (1) достаточно показать, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{(1-\alpha)^n}{E_n} = 0.$$

Предположим противное, что

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{(1-\alpha)^n}{E_n} > q > 0,$$

тогда при достаточно больших n

$$E_n < \frac{1}{q}(1-\alpha)^n.$$

В таком случае, по теореме Бернштейна,* функция $f(x)$ будет регулярна в эллипсе с фокусами $(\alpha, 0)$, $(1-\alpha, 0)$ и полусуммой осей равной

$$\frac{1-2\alpha}{2(1-\alpha)},$$

что противоречит поставленному условию, что и требовалось доказать.

* Сообщ. Харьк. мат. общ., сер. II, т. XIII, № 4—5, стр. 62, 86.

Этот результат содержит, как частный случай, указанное выше предложение С. Н. Бернштейна.

Заметим, что соображения примененные для доказательства теоремы I, могут оказаться полезными и в других случаях. Рассмотрим более общую задачу исследования E_n^e для функции $f(x)$ в произвольном промежутке (a, b). Тогда нужно найти систему $(n+1)$ линейно независимых полиномов с целыми коэффициентами, мало уклоняющихся от нуля в этом промежутке. Пусть ε наибольшее уклонение от нуля суммы модулей этих полиномов в (a, b), построив наименее уклоняющийся от $f(x)$ в (a, b) полином $P(x)$, разложив его по указанным полиномам с целыми коэффициентами и взяв целую часть от коэффициентов разложения, получим полином $Q(x)$ с целыми коэффициентами, отличающийся от $P(x)$ не более чем на ε. Таким образом

$$E_n^e < E_n + \varepsilon.$$

В теореме I за основную систему были взяты полиномы

$$x^k(1-x)^{n-k} \qquad [k = 0, 1, \ldots, n].$$

Беря, например, за такую систему полиномы

$$x^k(3x-1)^{n-k}$$

для промежутка

$$\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$$

найдем

$$E_n^e = E_n + 0\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

Также в промежутке

$$\left(\frac{1}{q} - \varepsilon, \frac{1}{q} + \varepsilon\right),$$

где $q > 1$ целое положительное число, а

$$\frac{1}{q(q-1)} > \varepsilon > 0$$

найдем

$$E_n^e = E_n + 0\left(\left(\frac{1}{q} + \varepsilon\right)^n\right).$$

Рассмотрим теперь вопрос о приближении к функции полиномами с целыми коэффициентами *во всем* промежутке (0, 1). Для того, чтобы $E_n^e \to 0$ необходимо, очевидно, дополнительное условие: $f(0)$ и $f(1)$ целые или равносильное ему $f(0) = f(1) = 0$. Обозначим через E_n' наилучшее приближение к $f(x)$ в (0, 1) посредством полиномов $P(x)$ степени n с произвольными коэффициентами подчиненных добавочному условию:

$$P(0) = P(1) = 0. \tag{5}$$

Так как от произвольного полинома $\overline{P}(x)$ можно добавлением слагаемого

$$-\overline{P}(0) - \left(\overline{P}(1) - \overline{P}(0)\right) x$$

добиться выполнения условия (5), то

$$E_n' \leqslant 2E_n.$$

Очевидно, что полином с целыми коэффициентами, апроксимация которого < 1, должен удовлетворять условию (5), а потому

$$E_n' \leqslant E_n^e.$$

Мы можем высказать теперь следующее предложение:

Теорема II. *Если* $f(x)$ *непрерывная функция, удовлетворяющая условию* $f(0) = f(1) = 0$, *то в промежутке* (0, 1):

$$E_n^e = E_n' + 0\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant 2E_n + 0\left(\frac{1}{n}\right). \tag{6}$$

Доказательство. По определению E_n' найдется полином $P(x)$ степени n, удовлетворяющий условию (5) и неравенству:

$$|P(x) - f(x)| \leqslant E_n'. \tag{7}$$

Представим его в форме Бернштейна:

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \varphi_{k,n}.$$

В силу условия (5), непременно $\varphi_{0,n} = \varphi_{n,n} = 0$.

Определим полином $Q(x)$ с целыми коэффициентами, положив:

$$Q(x) = \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} [C_n^k \varphi_{k,n}].$$

Рассмотрим разность:

$$|P(x) - Q(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} x^k (1-x)^{n-k} < \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} < \frac{1}{n}.$$

Таким образом

$$|f(x) - Q(x)| < E_n' + \frac{1}{n},$$

откуда следует (3), что и требовалось доказать.

Заметим, что порядок $\frac{1}{n}$ для E_n^e является, вообще говоря, наилучшим. Действительно, если бы порядок E_n^e был бы выше $\frac{1}{n}$, именно

$$\frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \quad (\varepsilon > 0),$$

то последовательность апроксимирующих полиномов можно было бы дифференцировать и мы получили бы для $f'(x)$ сколь угодно близкие полиномы с целыми коэффициентами, что возможно только в том случае, когда $f'(0)$ и $f'(1)$ целые.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ОБ ОДНОЙ MINIMUM-ПРОБЛЕМЕ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И О ЧИСЛЕ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ, КОТОРЫЕ ЛЕЖАТ ВНУТРИ ЕДИНИЧНОГО КРУГА

Н. И. АХИЕЗЕРА

(*Представлено академиком* С. Н. Бернштейном)

Введение

Пусть заданы внутри единичного круга плоскости комплексного переменного z ($|z| < 1$) $n+1$ точка:

$$z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}. \tag{1}$$

Рассматривается совокупность всех регулярных в области $|z| < 1$ аналитических функций $f(z)$, которые в точках (1) принимают заданные значения $w_1, w_2, \ldots, w_{n+1}$:

$$f(z_1) = w_1, \; f(z_2) = w_2, \; \ldots, \; f(z_{n+1}) = w_{n+1}. \tag{2}$$

Каково наименьшее значение, которое может иметь верхняя граница модуля функции этой совокупности в круге $|z| < 1$, и для каких функций совокупности это наименьшее значение верхней границы модуля достигается?

Эта относящаяся к Carathéodory-Fejér'овскому кругу идей задача находится в тесной связи с той проблемой об ограниченных функциях, которую в 1915 г. поставил и решил G. Pick.*

* G. Pick. Über die Beschränkungen analytischer Funktionen, welche durch vorgegebene Funktionswerte bewirkt werden. Math. Ann., Bd. 77, SS. 7—23; id. Über beschränkte Funktionen mit vorgeschriebenen Wertezuordnungen. Ann. Acad. Sc. Fenn., Ser. A, t. XV, № 3, pp. 1—17.—См. также интересные исследования R. Nevanlinna: Asymptotische Entwicklungen beschränkter Funktionen und das Stieltjessche Momentenproblem. Ann. Acad. Sc. Fenn., Ser. A, t. XVIII, № 5, pp. 1—53; Über beschränkte analytische Funktionen, ibid., t. XXXII, № 7, pp. 1—75.

С помощью предельного перехода из сформулированной задачи получается более общая, в которой кроме значений самой функции $f(z)$ задаются значения ее производных.

Частным и весьма важным случаем этой общей проблемы является первоначальная проблема Carathéodory-Fejér'а,* в которой условия (2) заменяются следующими:

$$(3) \qquad f(0)=c_0,\ f'(0)=1!\,c_1,\ f''(0)=2!\,c_2,\ \ldots,\ f^{(n)}(0)=n!\,c_n.$$

Эта проблема примыкает к проблеме коэффициентов ограниченных степенных рядов, новое и весьма элегантное решение которой дал I. Schur в двух прекрасных мемуарах под общим заглавием «Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind».**

Второй из этих мемуаров содержит среди многих других весьма интересную теорему о коэффициентах алгебраических уравнений, все корни которых по модулю меньше единицы. Позднее эта теорема была обобщена и доказана чисто алгебраическим, независящим от алгорифма Landau-Schur'а, методом в работе A. Cohn'a.***

Обратно, пользуясь результатами A. Cohn'a можно получить решение задачи Carathéodory-Fejér'а.

В простейшем случае, когда

$$0 < c_0 \leqslant c_1 \leqslant c_2 \leqslant \cdots \leqslant c_n,$$

достаточно, как показал L. Fejér,**** воспользоваться вместо теорем A. Cohn'а предложением Kakeya. Таким путем в этом специальном случае получается совершенно элементарное решение задачи Carathéodory-Fejér'а.

В настоящей работе дается элементарное решение проблемы Carathéodory-Fejér'а в общем случае (произвольные $c_0, c_1, \ldots, c_n$), а также проблемы Pick'а (условия (2)).

* Carathéodory-Fejér. Über den Zusammenhang der Extremen von harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard-Landauschen Satz. Rendic. del Circ. Mat. di Palermo, Bd. 32, 1911.

** Journ. f. d. reine u. angew. Math., Bd. 147, SS. 205—232 u. Bd. 148, SS. 122—145.

*** A. Cohn. Über die Anzahl der Wurzeln einer algebraischen Gleichung in einem Kreise. Math. Ztschr., Bd. 14, SS. 110—148.

**** L. Fejér. Über gewisse Minimumprobleme der Funktionentheorie. Math. Ann., Bd. 97, SS. 104—123. См. также: Egerváry. Über gewisse Extremumprobleme der Funktionentheorie. Math. Ann., Bd. 99. SS. 542—562.

При этом обе задачи обобщаются в некотором новом направлении и, как простое следствие из рассматриваемых extremum-проблем, выводится одна из главных теорем A. Cohn'a.

§ 1. Вспомогательное предложение

Для сокращения речи условимся говорить, что аналитическая функция $f(z)$ принадлежит классу K_p, если она обладает следующими свойствами:

1) $f(z)$ удовлетворяет условиям (2) или иным условиям, которые получаются из условий (2) с помощью упомянутого выше предельного перехода (напр., условиям (3)), но которые предполагаются твердо установленными и для всех рассматриваемых функций одинаковыми (мы будем называть их условиями (B));

2) $f(z)$ в области $|z| \leqslant 1$ регулярна за возможным исключением некоторых лежащих внутри круга $|z| < 1$ полюсов, правильно* сосчитанное число которых не превышает p.

Из определения следует, что класс K_p содержится в каждом из последующих классов $K_{p+1}, K_{p+2}, \ldots$

Заметим также, что разность двух функций, удовлетворяющих условиям (B), обращается в области $|z| < 1$ по крайней мере $n+1$ раз в нуль.

Теорема 1.

Если существует удовлетворяющая условиям (B) рациональная дробь

$$R(z) = \lambda \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m}{\bar{a}_m + \bar{a}_{m-1} z + \ldots + \bar{a}_0 z^m} \qquad (m \leqslant n), \tag{4}$$

*где λ вещественно и положительно, которая в области $|z| < 1$ имеет точно** p полюсов, то для всякой принадлежащей классу K_{p+n-m} функции $f(z)$ выполняется неравенство*

$$\max_{|z|=1} |f(z)| \geqslant \lambda. \tag{5}$$

Доказательство.

Пусть $f(z)$ какая нибудь функция класса K_{p+n-m}.

* Это значит, что l-кратный полюс считается l раз.

** См. предыдущую сноску.

Рассмотрим разность

$$\varphi(z) = f(z) - R(z) \tag{6}$$

и обозначим через σ и τ соответственно число полюсов и число нулей функции $\varphi(z)$ в области $|z| < 1$. Легко видеть, что

$$0 \leqslant \sigma \leqslant 2p + n - m, \tag{7}$$

$$\tau \geqslant n + 1. \tag{8}$$

Будем различать два взаимно исключающих друг друга случая.

Случай 1. На окружности $|z| = 1$ функция $\varphi(z)$ не обращается в нуль, иными словами существует такое $\delta > 0$, что при $|z| = 1$ выполняется неравенство

$$|\varphi(z)| \geqslant \delta.$$

Так как функция $R(z)$ в области $|z| < 1$ имеет точно p полюсов и на окружности $|z| = 1$ имеет постоянное значение модуля (равное λ), то число нулей функции $R(z)$ в области $|z| < 1$ не превосходит $m - p$.

Из сказанного следует, что, когда z описывает один раз в положительном направлении окружность $|z| = 1$, аргумент функции

$$\frac{\varphi(z)}{R(z)} \tag{9}$$

увеличивается по крайней мере на

$$2\pi(\tau - \sigma + p - m + p),$$

а это выражение в силу (7) и (8) не меньше, чем 2π.

Отсюда следует, что на окружности $|z| = 1$ существует по крайней мере одна точка ζ, в которой дробь (9) вещественна и положительна. Для этой точки следовательно

$$|f(\zeta)| = |R(\zeta) + \varphi(\zeta)| = |R(\zeta)| \cdot \left\{1 + \frac{\varphi(\zeta)}{R(\zeta)}\right\} \geqslant \lambda + \delta,$$

что и доказывает наше утверждение.

Случай 2. На окружности $|z| = 1$ существуют точки, в которых

$$\varphi(z) = 0.$$

Так как рассматриваемые функции предполагаются регулярными на окружности $|z|=1$, то существует такое ρ $(0<\rho<1)$, что

1) функции $\varphi(z)$ и $R(z)$ в области $\rho \leqslant |z| < 1$ конечны и отличны от нуля,

2) функция $\varphi(z)$ в области $|z|<\rho$ обращается в нуль по крайней мере $n+1$ раз.*

Взявши некоторое r, удовлетворяющее неравенству

$$\rho < r < 1,$$

и рассуждая так же, как и в случае 1, найдем, что на окружности $|z|=r$ существует по крайней мере одна точка ζ_r, для которой

$$\frac{\varphi(\zeta_r)}{R(\zeta_r)} > 0$$

и значит

$$|f(\zeta_r)| > |R(\zeta_r)|.$$

Приближая r к единице, придем к некоторой точке ζ $(|\zeta|=1)$, в которой

$$|f(\zeta)| \geqslant |R(\zeta)| = \lambda,$$

что и доказывает теорему.

Доказанное предложение позволит нам решить следующую extremum-проблему, которая в некотором отношении является обобщением приведенных в введении задач.

Задача A.

Рассматривается совокупность всех функций класса K_p, где p некоторое фиксированное число, удовлетворяющее неравенству

$$0 \leqslant p \leqslant n.$$

Каково наименьшее значение, которое может иметь maximum модуля функции класса K_p на окружности $|z|=1$?

Мы увидим, что решение этой задачи немедленно получается в результате исследования, не содержат ли классы K_p $(p=0, 1, 2, \ldots, n)$ рацио-

* Для этого достаточно, чтобы ρ превосходило наибольшее из абсолютных значений величин (1).

нальных функций типа (4). Вместе с тем после того, как эта задача решена, указанные в введении проблемы Carathéodory-Fejér'a и G. Pick'a затруднений не представляют.

§ 2. Задача Carathéodory-Fejér'a

Начнем с решения задачи A в предположении, что условия (B) имеют вид (3) (условия Carathéodory-Fejér'a); при этом для простоты примем, что $c_0 \neq 0$, что общности не нарушает.

С этой целью будем искать все дроби вида

$$F(z) = \lambda \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{\bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} z + \ldots + \bar{a}_0 z^n}, \tag{10}$$

где λ положительно, а коэффициенты связаны соотношениями

$$F(0) = c_0,\ F'(0) = 1!\, c_1,\ \ldots,\ F^{(n)}(0) = n!\, c_n. \tag{11}$$

Так как $F(0)$ есть величина конечная. то $F(z)$ в окрестности точки $z = 0$ регулярна и может быть представлена в виде

$$F(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \gamma_{n+1} z^{n+1} + \ldots \tag{12}$$

Сравнивая (10) и (12), получим следующую систему уравнений

$$\left\{\begin{aligned} \lambda a_0 &= c_0 \bar{a}_n \\ \lambda a_1 &= c_1 \bar{a}_n + c_0 \bar{a}_{n-1} \\ \lambda a_2 &= c_2 \bar{a}_n + c_1 \bar{a}_{n-1} + c_0 \bar{a}_{n-2} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda a_n &= c_n \bar{a}_n + c_{n-1} \bar{a}_{n-1} + \ldots + c_0 \bar{a}_0. \end{aligned}\right. \tag{13}$$

Этой системе уравнений должны удовлетворять положительная величина λ и коэффициенты $a_0, a_1, \ldots a_n$ тех рациональных дробей (10), которые удовлетворяют условиям (11).

Отсюда немедленно следует, что положительная величина λ должна удовлетворять уравнению.

$$
(14) \qquad D(\lambda) = \begin{vmatrix}
\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & c_0 & c_1 & c_2 & \dots & c_n \\
0 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & c_0 & c_1 & \dots & c_{n-1} \\
0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 & c_0 & \dots & c_{n-2} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & c_0 \\
\bar{c}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\bar{c}_1 & \bar{c}_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \lambda & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\bar{c}_n & \bar{c}_{n-1} & \bar{c}_{n-2} & \dots & \bar{c}_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda
\end{vmatrix} = 0.
$$

Очевидно, что каждому положительному корню этого уравнения отвечает некоторое удовлетворяющее требованиям задачи решение системы (13) относительно неизвестных $a_0, a_1, \dots, a_n$; а значит некоторые дроби вида (10), удовлетворяющие условиям (11). Обратно, если бы оказалось, что уравнение (14) не имеет положительных корней, то отсюда следовало бы, что дроби вида (10), удовлетворяющей условиям (11) не существует.

Но из характера уравнения (14) следует, что все его корни вещественны, и, так как $D(-\lambda) = D(\lambda)$, то уравнение (14) положительные корни имеет, и правильно сосчитанное число их равно в точности $n+1$. Поэтому нам необходимо исследовать распределение среди классов K_p ($p = 0, 1, \dots, n$) тех рациональных дробей, которые отвечают различным корням уравнения (14).

Лемма.

Если λ^* есть ν-кратный корень уравнения (14), *то среди отвечающих ему дробей типа* (10) *существует такая дробь, которая с помощью сокращения может быть представлена в виде*

$$
(15) \qquad \lambda^* \frac{b_0 + b_1 z + \dots + b_{n-\nu+1} z^{n-\nu+1}}{\bar{b}_{n-\nu+1} + \bar{b}_{n-\nu} z + \dots + \bar{b}_0 z^{n-\nu+1}}.
$$

Доказательство.

Чтобы показать справедливость этой леммы достаточно доказать, что в силу предположенной ν-й кратности корня λ^* в выражении (15) коэффициенты $b_0, b_1, \ldots, b_{n-\nu+1}$ можно подобрать так, чтобы выполнились все условия (11). А это сводится к доказательству существования решений у следующей системы

$$\begin{aligned}
\lambda^* b_0 &= c_0 \bar{b}_{n-\nu+1} \\
\lambda^* b_1 &= c_1 \bar{b}_{n-\nu+1} + c_0 \bar{b}_{n-\nu} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\lambda^* b_{n-\nu+1} &= c_{n-\nu+1} \bar{b}_{n-\nu+1} + \ldots + c_0 \bar{b}_0 \\
0 &= c_{n-\nu+2} \bar{b}_{n-\nu+1} + \ldots + c_1 \bar{b}_0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= c_n \bar{b}_{n-\nu+1} + \ldots + c_{\nu-1} \bar{b}_0,
\end{aligned}$$

где неизвестными являются $b_0, b_1, \ldots, b_{n-\nu+1}$.

Таким образом, лемма будет доказана, если мы покажем справедливость следующих равенств:

$$\begin{vmatrix}
\lambda^* & 0 & \ldots & 0 & c_0 & c_1 & \ldots & c_{n-\nu+1} \\
0 & \lambda^* & \ldots & 0 & 0 & c_0 & \ldots & c_{n-\nu} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \ldots & \lambda^* & 0 & 0 & \ldots & c_0 \\
\bar{c}_0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda^* & 0 & \ldots & 0 \\
\bar{c}_1 & \bar{c}_0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda^* & \ldots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\bar{c}_{n-\nu+1} & \bar{c}_{n-\nu} & \ldots & \bar{c}_0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda^*
\end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix}
0 & 0 & \ldots & 0 & c_{k+1} & c_{k+2} & \ldots & c_{k+n-\nu+2} \\
0 & \lambda^* & \ldots & 0 & 0 & c_0 & \ldots & c_{n-\nu} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \ldots & \lambda^* & 0 & 0 & \ldots & c_0 \\
\bar{c}_0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda^* & 0 & \ldots & 0 \\
\bar{c}_1 & \bar{c}_0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda^* & \ldots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c_{n-\nu+1} & \bar{c}_{n-\nu} & \ldots & \bar{c}_0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda^*
\end{vmatrix} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 2).$$

Левая часть первого из этих равенств есть с точностью до отличного от нуля множителя тот главный минор порядка $2n+2-\nu+1$ определителя $D(\lambda^*)$, который получится, если в определителе $D(\lambda^*)$ вычеркнуть первые $\nu-1$ колонну и первые $\nu-1$ строку.

Подобным образом для получения левой части второго из подлежащих доказательству равенств достаточно в определителе $D(\lambda^*)$ вычеркнуть первые $\nu-1$ колонну и горизонтали, номера которых равны

$$1, 2, \ldots, \nu-k-2, \nu-k, \nu-k+1, \ldots, \nu.$$

На основании этих замечаний справедливость леммы очевидна, так как в силу предположенной ν-й кратности корня λ^* ранг определителя $D(\lambda^*)$ равен $2n+2-\nu$. Теперь мы имеем возможность доказать основное предложение.

Теорема 2.

Если положительные корни уравнения (14)

$$\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_q > 0$$

имеют соответственно кратности

$$\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q,$$

причем

$$\nu_0+\nu_1+\ldots+\nu_q = n+1, \tag{16}$$

*то существует ряд дробей, удовлетворяющих условиям (3), которые после полного сокращения принимают вид**

$$R_j(z) = \lambda_j \frac{b_0+b_1 z+\ldots+b_{n-\nu_j+1} z^{n-\nu_j+1}}{\bar{b}_{n-\nu_j+1}+\bar{b}_{n-\nu_j} z+\ldots+\bar{b}_0 z^{n-\nu_j+1}} \quad (j=0, 1, 2, \ldots q), \tag{17}$$

причем в области $|z|<1$ дробь $R_j(z)$ имеет точно

$$\nu_0+\nu_1+\ldots+\nu_{j-1} \tag{18}$$

полюсов; в частности $R_0(z)$ в области $|z|\leqslant 1$ регулярна.

* Здесь для простоты письма вместо $b_0^{(j)}, b_1^{(j)}, \ldots$ написано $b_0, b_1, \ldots$

Доказательство.

На основании леммы мы знаем, что среди отвечающих корню λ_j дробей во всяком случае существует такая дробь, которая может быть приведена к виду (17). Поэтому нам нужно показать, что дробь (17) далее не сокращается и что ее число полюсов в области $|z|<1$ дается выражением (18).

Обратимся сначала ко второму утверждению.

В первую очередь докажем, что $R_0(z)$ в области $|z|<1$ регулярна. Допустим противное и предположим, что $R_0(z)$ имеет в области $|z|<1$ α полюсов. Тогда $R_1(z)$ должна иметь не меньше, чем $\nu_0+\alpha$ полюсов; иначе, в силу теоремы 1, было бы $\lambda_1 \geqslant \lambda_0$. Подобным образом $R_2(z)$ в области $|z|<1$ должна иметь не меньше, чем $\nu_0+\nu_1+\alpha$ полюсов и т. д.; наконец, $R_q(z)$ должна иметь не меньше, чем

$$\nu_0+\nu_1+\ldots+\nu_{q-1}+\alpha=N$$

полюсов в области $|z|<1$.

Но

$$N=n+1+\alpha-\nu_q,$$

а степень функции $R_q(z)$ равна $n+1-\nu_q$, т. е. меньше, чем N, откуда и следует невозможность сделанного предположения.

Итак, функция $R_0(z)$ в области $|z|<1$ регулярна. Перейдем к функции $R_1(z)$. Она не может иметь в области $|z|<1$ менее ν_0 полюсов; иначе она принадлежала бы классу K_{ν_0-1} и в силу теоремы 1 было бы $\lambda_1 \geqslant \lambda_0$. С другой стороны, $R_1(z)$ не может иметь больше, чем ν_0 полюсов, так как повторяя только что примененное рассуждение, мы нашли бы, что $R_2(z)$ имеет более $\nu_0+\nu_1$ полюсов и т. д., а невозможность этого уже обнаружена. Итак, $R_1(z)$ имеет точно ν_0 полюсов в области $|z|<1$; подобным образом докажем, что $R_2(z)$ имеет $\nu_0+\nu_1$ полюсов и т. д.

Остается доказать, что дроби (17) несократимы.

Если мы предположим, что дробь $R_j(z)$ сократима, то степень числителя и знаменателя ее не превосходят числа $n-\nu_j=m$, число же полюсов функции $R_j(z)$ равно

$$\nu_0+\nu_1+\ldots+\nu_{j-1}=p;$$

а так как дробь $R_{j+1}(z)$ принадлежит классу

$$K_{\nu_0+\nu_1+\ldots+\nu_j},$$

т. е. классу

$$K_{p+n-m},$$

то в силу теоремы 1 должно быть

$$\lambda_{j+1} \geqslant \lambda_j,$$

что невозможно.

Таким образом, теорема 2 доказана полностью.

Отсюда в силу теоремы 1 и получается решение задачи А для случая Carathéodory-Fejér'овских условий.

Полученный результат можно представить в следующем виде:

Теорема 3.

Если положительные корни уравнения (14)

$$\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_q > 0$$

имеют соответственно кратности

$$\nu_0, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_q,$$

(*причем*

$$\nu_0 + \nu_1 + \ldots + \nu_q = n + 1),$$

и если регулярная на окружности $|z| = 1$ *функция* $f(z)$ *удовлетворяет условиям* (3) *и в области* $|z| < 1$ *из особенностей имеет не более* p *полюсов* ($0 \leqslant p \leqslant n$), *то*

$$\max_{|z|=1} |f(z)| \geqslant \lambda_j,$$

где индекс j *определяется из неравенства*

$$\nu_0 + \nu_1 + \ldots + \nu_{j-1} \leqslant p \leqslant \nu_0 + \nu_1 + \ldots + \nu_{j-1} + \nu_j - 1,$$

причем $j = 0$, *если* $p \leqslant \nu_0 - 1$.

Переходим к задаче Carathéodory-Fejér'a в обычном разумении, т. е. в том виде, как она сформулирована в введении

Решение этой задачи дается следующей теоремой:

Теорема 4.

Если

$$f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots + c_n z^n + \gamma_{n+1} z^{n+1} + \ldots \tag{19}$$

регулярная в области $|z| < 1$ *аналитическая функция,** *то верхняя граница* G *ее модуля в области* $|z| < 1$ *удовлетворяет неравенству*

$$G \geqslant \lambda, \tag{20}$$

где λ *есть наибольший корень уравнения* (14); *при этом знак равенства в формуле* (20) *имеет место тогда и только тогда, когда*

$$f(z) = \lambda \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m}{\bar{a}_m + \bar{a}_{m-1} z + \ldots + \bar{a}_0 z^m} = R(z) \quad (m \leqslant n),$$

где $R(z)$ *есть отвечающая корню* λ *и регулярная в области* $|z| \leqslant 1$ *рациональная дробь.*

Доказательство.

Рассмотрим произведение

$$\varphi(z) = f(z)(\bar{a}_m + \bar{a}_{m-1} z + \ldots + \bar{a}_0 z^m).$$

На основании соотношений

$$\begin{aligned} \lambda a_0 &= c_0 \bar{a}_m \\ \lambda a_1 &= c_1 \bar{a}_m + c_0 \bar{a}_{m-1} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda a_m &= c_m \bar{a}_m + c_{m-1} \bar{a}_{m-1} + \ldots + c_0 \bar{a}_0 \\ 0 &= c_{m+1} \bar{a}_m + c_m \bar{a}_{m-1} + \ldots + c_1 \bar{a}_0 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 &= c_n a_m + c_{n-1} \bar{a}_{m-1} + \ldots + c_{n-m} \bar{a}_0, \end{aligned}$$

получаем

$$\varphi(z) = \lambda(a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m + b_{n+1} z^{n+1} + \ldots).$$

* О поведении функции $f(z)$ на самой окружности $|z| = 1$ мы никаких предположений не делаем.

При $0 \leqslant \rho < 1$ будем иметь

$$\lambda^2 \sum_{k=0}^{m} |a_k|^2 \rho^{2k} + \lambda^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k|^2 \rho^{2k} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{i\theta}) \{\bar{a}_m + \ldots + \bar{a}_0 \rho^m e^{mi\theta}\}|^2 d\theta,$$

откуда

$$\lambda^2 \sum_{k=0}^{m} |a_k|^2 \rho^{2k} + \lambda^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k|^2 \rho^{2k} \leqslant G^2 \sum_{k=0}^{m} |a_k|^2 \rho^{2(m-k)}.$$

Следовательно ряд

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k|^2$$

сходится, и

$$\lambda^2 \sum_{k=0}^{m} |a_k|^2 + \lambda^2 \sum_{k=n+1}^{\infty} |b_k|^2 \leqslant G^2 \sum_{k=0}^{m} |a_k|^2.$$

Эта формула показывает,* что наименьшим значением величины G является λ и что это наименьшее значение достигается не иначе, как при выполнении равенств

$$b_{n+1} = b_{n+2} = b_{n+3} = \ldots = 0,$$

т. е. не иначе, как при наличии тождества

$$f(z)(\bar{a}_m + \bar{a}_{m-1} z + \ldots + \bar{a}_0 z^m) = \lambda(a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m).$$

Таким образом теорема доказана.

§ 3. Замечание об уравнении (14)

Уравнение (14) для определения величины λ можно представить в виде

$$\begin{vmatrix} \lambda E, & C \\ \bar{C}', & \lambda E \end{vmatrix} = 0,$$

* Рассуждение, которым мы здесь пользуемся, впервые применил I. Schur в цитированном выше мемуаре. См. также O. Szász. Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe. Math. Ztschr., Bd. 1, SS. 163—184.

где C есть треугольная матрица $n+1$-го порядка

$$C=\begin{Vmatrix} c_0, & c_1, & \ldots, & c_n \\ 0, & c_0, & \ldots, & c_{n-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & c_0 \end{Vmatrix}.$$

$\overline{C}'$ есть матрица сопряженная с транспонированной относительно C и, наконец, E есть единичная матрица $n+1$-го порядка.

В силу теоремы I. Schur'a *

$$\begin{vmatrix} \lambda E, & C \\ \overline{C}', & \lambda E \end{vmatrix} = |\lambda^2 E - \overline{C}' C|.$$

Таким образом уравнение (14) можно представить в виде

$$(14_1) \qquad |\lambda^2 E - \overline{C}' C| = 0.$$

Заметим, что левая часть этого уравнения является детерминантом Hermite'овой формы

$$(21) \qquad H = \lambda^2 \sum_{k=1}^{n+1} x_k \overline{x}_k - \sum_{k=1}^{n+1} |c_0 x_k + c_1 x_{k+1} + \ldots + c_{n+1-k} x_{n+1}|^2.$$

§ 4. Приложение к вопросу о числе корней алгебраического уравнения, лежащих внутри круга

Пусть дано уравнение

$$(22) \qquad a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n = 0,$$

* См. цитированный выше мемуар I. Schur'a. Теорема I. Schur'a состоит в следующем: если A, B, C, D четыре матрицы одного и того же порядка и если A с C перестановочна, то

$$\begin{vmatrix} A, & B \\ C, & D \end{vmatrix} = |AD - CB|.$$

Доказательство основано на соотношении

$$\begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A, & 0 \\ C, & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E, & A^{-1} B \\ 0, & D - CA^{-1} B \end{pmatrix}.$$

См. также цитированный мемуар A. Cohn'a, стр. 130.

где

$$a_n \neq 0, \quad a_0 \neq 0.$$

Рассмотрим функцию

$$F(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{\bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} z + \ldots + \bar{a}_0 z^n}, \tag{23}$$

которая в достаточно малой окрестности точки $z = 0$ регулярна и значит может быть представлена в виде

$$F(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n + \ldots,$$

где коэффициенты c_i определяются из соотношений

$$\left\{\begin{array}{l} a_0 = c_0 \bar{a}_n, \\ a_1 = c_0 \bar{a}_{n-1} + c_1 \bar{a}_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_n = c_0 \bar{a}_0 + c_1 \bar{a}_1 + \ldots + c_n \bar{a}_n. \end{array}\right. \tag{24}$$

Отсюда следует, что уравнение (14) имеет корень $\lambda = 1$.

Обозначая положительные корни этого уравнения через

$$\lambda_0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_{n-1} \geqslant \lambda_n > 0$$

(среди них находится 1), заметим, что квадраты этих корней являются характеристическими числами Hermite'овой формы

$$\sum_{k=1}^{n+1} |c_0 x_k + c_1 x_{k+1} + \ldots + c_{n+1-k} x_{n+1}|^2.$$

Предположим, что $1 = \lambda_{n-k}$, причем

$$\lambda_{n-k+1} < 1 < \lambda_{n-k-1};$$

иными словами, предположим, что ранг формы

$$H = \sum_{i=1}^{n+1} |x_i|^2 - \sum_{i=1}^{n+1} |c_0 x_i + c_1 x_{i+1} + \ldots + c_{n+1-i} x_{n+1}|^2 \tag{25}$$

равен n, а сигнатура равна $2k - n$

Так как таким образом 1 есть простой корень уравнения (14), то всякое решение системы (24) относительно величин a_i имеет вид

$$a_k^* = \sigma a_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n$$

где σ произвольный вещественный параметр.

Но в силу теоремы 2 среди отвечающих корню $\lambda = 1$ дробей существует дробь n-й степени несократимая и имеющая в области $|z| < 1$ точно $n - k$ полюсов. Поэтому и дробь (23) несократима и имеет точно $n - k$ полюсов в области $|z| < 1$.

Таким образом, если ранг формы (25) равен n, а сигнатура равна $2k - n$, то уравнение (22) имеет точно k нулей в области $|z| < 1$ и точно $n - k$ нулей в области $|z| > 1$. При этом многочлены

$$(26) \quad A(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, \quad A^*(z) = \bar{a}_n + \bar{a}_{n-1} z + \ldots + \bar{a}_0 z^n$$

не имеют общих корней, иными словами уравнение (22) не имеет ни одной пары корней, зеркально расположенных относительно окружности $|z| = 1$.

Чтобы отсюда получить теорему Schur-Cohn'а остается подвергнуть форму (25) некоторому линейному преобразованию, при котором вместо величин c_i войдут величины a_i.

С этой целью положим

$$(27) \qquad x_{n+1} = a_n t_{n+1}, \quad x_k = t_k + \bar{a}_{k-1} t_{n+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

В силу этих соотношений и равенств (24) получим, что

$$c_0 x_i + c_1 x_{i+1} + \ldots + c_{n+1-i} x_{n+1} =$$
$$= c_0 t_i + c_1 t_{i+1} + \ldots + c_{n-i} t_n + a_{n+1-i} t_{n+1}.$$

Замечая далее, что

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{n+1-i} (c_0 t_i + c_1 t_{i+1} + \ldots + c_{n-i} t_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} t_k (\bar{a}_{n+1-k} c_0 + \ldots + \bar{a}_n c_{k-1}) = \sum_{i=1}^{n} a_{i-1} t_i,$$

без труда найдем, что с помощью неособенного преобразования (27) форма (25) принимает вид:

$$H = \sum_{i=1}^{n} |t_i|^2 - \sum_{i=1}^{n} |c_0 t_i + c_1 t_{i+1} + \ldots + c_{n-i} t_n|^2. \tag{28}$$

Полученную форму подвергнем дальнейшему неособенному преобразованию

$$t_i = \bar{a}_n z_i + \bar{a}_{n-1} z_{i+1} + \ldots + \bar{a}_i z_n. \tag{29}$$

В силу соотношений (24) найдем, что

$$c_0 t_i + c_1 t_{i+1} + \ldots + c_{n-i} t_n = a_0 z_i + a_1 z_{i+1} + \ldots + a_{n-i} z_n.$$

Поэтому форма (28) принимает вид:

$$H = \sum_{i=1}^{n} |\bar{a}_n z_i + \bar{a}_{n-1} z_{i+1} + \ldots + \bar{a}_i z_n|^2 - \tag{30}$$

$$- \sum_{i=1}^{n} |a_0 z_i + a_1 z_{i+1} + \ldots a_{n-i} z_n|^2.$$

Сюда входят исключительно коэффициенты a_j, и мы получаем теорему 5.

Теорема 5 (A. Cohn)*.

Если Hermite'ова форма (30) *имеет ранг* n *и сигнатуру* $2k - n$, *то уравнение* (22) *имеет* k *корней в области* $|z| < 1$ *и* $n - k$ *корней в области* $|z| > 1$; *при этом полиномы* (26) *общих корней не имеют.*

§ 5. Задача G. Pick'a

Обратимся теперь к задаче A в предположении, что условия (B) имеют вид (2) (условия G. Pick'a), и, поступая так же, как и в § 2, займемся отысканием постоянных по модулю на окружности $|z| = 1$ дробей степени n, удовлетворяющих условиям (B). При этом для простоты примем, что вели-

* I. Schur'у принадлежит тот частный случай теоремы, когда $k = n$.

чины w_k отличны от нуля, что общности не нарушает. Здесь представляется более удобным упомянутые дроби искать не в виде (10), а в виде

$$F(z)=\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{A_k w_k}{z-z_k}}{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{A_k}{z-z_k}}, \tag{31}$$

так как выражение (31) при любых A_k удовлетворяет условиям (2), и, следовательно, остается потребовать, чтобы функция $F(z)$ на окружности $|z|=1$ имела постоянный модуль. Обозначая это значение модуля через λ, заметим, что упомянутое требование равносильно требованию, чтобы выполнились равенства

$$F\left(\frac{1}{\bar{z}_j}\right)=\frac{\lambda^2}{\bar{w}_j} \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, n+1),$$

откуда для определения величин A_k получается система уравнений

$$\sum_{k=1}^{n+1} A_k \frac{w_k \bar{w}_j-\lambda^2}{z_k \bar{z}_j-1}=0 \qquad (j=1, 2, 3, \ldots, n+1). \tag{32}$$

Таким образом уравнение для определения положительной величины λ принимает вид:

$$\begin{vmatrix} \frac{w_1\bar{w}_1-\lambda^2}{1-z_1\bar{z}_1}, & \frac{w_1\bar{w}_2-\lambda^2}{1-z_1\bar{z}_2}, & \ldots, & \frac{w_1\bar{w}_{n+1}-\lambda^2}{1-z_1\bar{z}_{n+1}} \\ \frac{w_2\bar{w}_1-\lambda^2}{1-z_2\bar{z}_1}, & \frac{w_2\bar{w}_2-\lambda^2}{1-z_2\bar{z}_2}, & \ldots, & \frac{w_2\bar{w}_{n+1}-\lambda^2}{1-z_2\bar{z}_{n+1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{w_{n+1}\bar{w}_1-\lambda^2}{1-z_{n+1}\bar{z}_1}, & \frac{w_{n+1}\bar{w}_2-\lambda^2}{1-z_{n+1}\bar{z}_2}, & \ldots, & \frac{w_{n+1}\bar{w}_{n+1}-\lambda^2}{1-z_{n+1}\bar{z}_{n+1}} \end{vmatrix}=0. \tag{33}$$

Полагая

$$a_{ik}=\frac{w_i\bar{w}_k}{1-z_i\bar{z}_k}, \quad b_{ik}=\frac{1}{1-z_i\bar{z}_k},$$

и замечая, что

$$a_{ik}=\bar{a}_{ki}, \quad b_{ik}=\bar{b}_{ki},$$

а также, что Hermite'овы формы

$$\sum a_{ik} x_i \bar{x}_k = \sum b_{ik} y_i \bar{y}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{y_\nu}{e^{i\theta} - z_\nu} \right|^2 d\theta,$$

где

$$y_i = w_i x_i$$

положительны, мы заключаем, что все значения величины λ^2, удовлетворяющие уравнению (33), положительны. Таким образом и для λ получим $n+1$ положительное значение.

В силу характера уравнения (33), если оно имеет кратный корень, ранг определителя (33) понижается на соответствующее число единиц. Поэтому повторяя mutatis mutandis рассуждения § 2, без труда докажем следующую лемму:

Если λ^* есть ν-кратный корень уравнения (33), то среди отвечающих ему дробей типа (31) существует такая дробь, которая с помощью упрощения может быть представлена в виде:

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-\nu+2} \frac{B_k w_k}{z - z_k}}{\sum\limits_{k=1}^{n-\nu+2} \frac{B_k}{z - z_k}} = \lambda^* \frac{b_0 + b_1 z + \ldots + b_{n-\nu+1} z^{n-\nu+1}}{\bar{b}_{n-\nu+1} + \bar{b}_{n-\nu} z + \ldots + \bar{b}_0 z^{n-\nu+1}},$$

Подобным образом доказываются теоремы, аналогичные теореме 2 и теореме 3. Не останавливаясь на этом, перейдем к доказательству предложения, аналогичного теореме 4.

Теорема 6.

Если $F(z)$ регулярная в области $|z| < 1$ аналитическая функция, удовлетворяющая условиям (2), то верхняя граница G ее модуля в области $(z) < 1$ удовлетворяет неравенству*

(34) $$G \geqslant \lambda,$$

* О поведении функции $F(z)$ на окружности $|z| = 1$ мы никаких предположений не делаем.

где λ есть наибольший корень уравнения (33); *при этом знак равенства в формуле* (34) *возможен тогда и только тогда, когда имеет место равенство*

$$F(z)=R(z)=\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{A_k w_k}{z-z_k}}{\sum_{k=1}^{n+1}\frac{A_k}{z-z_k}},$$

где $R(z)$ есть отвечающая корню λ и регулярная в области $|z|<1$ рациональная дробь.

Доказательство.

Рассмотрим произведение

$$\varphi(z)=F(z)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{A_k}{z-z_k}=\sum_{k=1}^{n+1}\frac{B_k}{z-z_k}+\psi(z), \tag{35}$$

где

$$\psi(z)=c_0+c_1z+c_2z^2+\ldots$$

есть регулярная в области $|z|<1$ функция.

Пусть

$$\rho=\max\{|z_1|,\ |z_2|,\ \ldots,\ |z_{n+1}|\}.$$

Возьмем произвольное r, удовлетворяющее неравенству

$$\rho<r<1,$$

и пусть $z=re^{i\theta}$.

Тогда в силу (35), с одной стороны,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(z)|^2\,d\theta\leqslant G^2\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\sum_{k=1}^{n+1}\frac{A_k}{z-z_k}\right|^2 d\theta=G^2\sum_{k,j}\frac{A_k\bar{A}_j}{r^2-z_k\bar{z}_j},$$

а с другой стороны,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varphi(z)|^2\,d\theta=\sum_{k,j}\frac{B_k\bar{B}_j}{r^2-z_k\bar{z}_j}+\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\psi(z)|^2\,d\theta+$$

$$+\frac{1}{\pi}\Re\int_0^{2\pi}\psi(z)\sum_{k=1}^{n+1}\frac{\bar{B}_k}{\bar{z}-\bar{z}_k}\,d\theta=\sum_{k,j}\frac{A_k\bar{A}_j w_k\bar{w}_j}{r^2-z_k\bar{z}_j}+\sum_{i=0}^{\infty}|c_i|^2r^{2i},$$

так как в силу условий (2) $B_k = A_k w_k$ и

$$\int_0^{2\pi} \psi(z) \frac{\overline{B}_k}{\bar{z} - \bar{z}_k} d\theta = \int_0^{2\pi} \psi(z) \frac{\overline{B}_k z}{r^2 - z\bar{z}_k} d\theta = i \oint_{|z|=r} \psi(z) \frac{\overline{B}_k dz}{z\bar{z}_k - r^2} = 0.$$

Поэтому

$$G^2 \sum_{k,j} \frac{A_k \overline{A}_j}{r^2 - z_k \bar{z}_j} \geqslant \sum_{k,j} \frac{A_k \overline{A}_j w_k \overline{w}_j}{r^2 - z_k \bar{z}_j} + \sum_{i=0}^{\infty} |c_i|^2 r^{2i}.$$

Следовательно ряд

$$\sum_{i=0}^{\infty} |c_i|^2$$

сходится и (в силу формул (32))

$$G^2 \sum_{k,j} \frac{A_k \overline{A}_j}{1 - z_k \bar{z}_j} \geqslant \lambda^2 \sum_{k,j} \frac{A_k \overline{A}_j}{1 - z_k \bar{z}_j} + \sum_{i=0}^{\infty} |c_i|^2.$$

Эта формула показывает, что наименьшим значением величины G является λ и что это наименьшее значение достигается не иначе, как при выполнении равенств

$$c_0 = c_1 = c_2 = \ldots = 0,$$

т. е. не иначе как при $\psi(z) \equiv 0$ и значит при

$$F(z) \sum_{k=1}^{n+1} \frac{A_k}{z - z_k} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{A_k w_k}{z - z_k},$$

что и требовалось доказать.

От редакции. Автор настоящей статьи, Н. И. Ахиезер, сообщил редакции ИМЕН, что в предыдущей своей работе «Об асимптотических свойствах полиномов на двух интервалах», напечатанной в ИМЕН, 1931, № 2, стр. 161—178, он допустил некоторые погрешности и недочеты, своевременно им не замеченные и не исправленные. Подробно указать их и исправить автор предполагает в новой работе, которая будет посвящена дальнейшему развитию той же самой темы.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ТЕОРИЯ КАЧКИ СУДОВ НА ПРОИЗВОЛЬНОМ ВОЛНЕНИИ

Г. Е. ПАВЛЕНКО

(*Представлено академиком* **А. Н. Крыловым**

I. Возмущающая сила на произвольной волне

§ **1.** Представим произвольное (неправильное) волнение моря посредством потенциала скоростей, который в общем случае неустановившегося движения будет выражаться функцией:

$$\varphi = (x, y, z, t).$$

Динамические условия, управляющие движением воды, в этом случае определяются интегралом Лагранжа:

$$U - P - \frac{v^2}{2} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + f(t),$$

где:

U — силовая потенциальная функция.

P — функция давлений, связанная с давлением p зависимостью:

$$\frac{dp}{\rho} = dP,$$

где

ρ — удельная масса воды.

v — абсолютная скорость.

$f(t)$ — произвольная постоянная относительно x, y и z функция времени.

Как известно, $f(t)$ можно положить равной нулю, имея в своем распоряжении право включить эту функцию в потенциал скоростей на том основании, что скорости получаются как частные производные от φ по протя-

жениям и потому не меняются от введения слагаемого, зависящего только от времени.

Далее, полагая, что из внешних сил действует только сила тяжести и что вода однородна и несжимаема, получаем:

$$U = gz; \quad P = \frac{p}{\rho}$$

и интеграл Лагранжа пишем в форме:

$$gz - \frac{p}{\rho} - \frac{v^2}{2} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

Рассматривая только малые движения, каковыми могут считаться всякие волновые движения воды в действительности, пренебрегаем членом $\frac{v^2}{2}$ как малым высшего порядка по сравнению с остальными членами, и определяем из полученного уравнения давление p в данной точке в данный момент:

$$p = \rho g z - \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t}.$$

§ **2.** В основу определения сил, действующих на судно, кладем допущение, состоящее в том, что присутствие судна не влияет на величину и распределение давлений в окружающей его воде. Это допущение представляется неизбежным и принимается во всех исследованиях по качке судов; сравнение основанных на нем теоретических выводов с данными опыта во многих частных случаях подтверждает его практическую пригодность.*

Пусть поверхность судна задана уравнением:

$$y = f(x, z),$$

причем оси координат направлены как обычно: OX — вперед, OY — вправо и OZ — вниз; начало лежит на поверхности воды в покое над центром тяжести судна.

* Впервые это допущение было формулировано и введено в теорию качки на правильной волне академиком А. Н. Крыловым.

В некоторой точке этой поверхности существует давление p, которое создает элементарную силу $pd\omega$, где $d\omega$ — элементарная площадь поверхности судна, направленную по нормали к поверхности.

Вертикальная составляющая этой силы будет:

$$dZ = p\cos(\widehat{n, z})\,d\omega,$$

где n — направление внутренней нормали к поверхности.

Момент этой силы относительно оси OY будет:

$$dM = xdZ - zdX.$$

Считая осадку судна малой по сравнению с длиной, вторым членом пренебрегаем, после чего получаем:

$$dM = px\cos(\widehat{n, z})\,d\omega.$$

Наконец, момент этой же силы относительно оси параллельной OX и проходящей через точку $x = 0$, $y = 0$, $z = z_0$ будет:

$$dm = ydZ - (z - z_0)\,dY,$$

где z_0 — координата начального положения центра тяжести судна. Так как горизонтальная составляющая элементарной силы равна:

$$dY = p\cos(\widehat{n, y})\,d\omega,$$

то выражение элементарного момента будет:

$$dm = py\cos(\widehat{n, z})d\omega - p(z - z_0)\cos(\widehat{n, y})\,d\omega.$$

Для получения полной величины вертикальной силы и моментов берем интеграл полученных выражений по всей смоченной поверхности Ω. Кроме сил гидромеханических воздействий будут действовать силы тяжести, которые дадут вертикальный вектор, равный D и приложенный к центру тя-

жести судна. Момент этого вектора относительно OY будем считать равным нулю.

$$Z = D + \rho g \int_{\Omega} z \cos(\widehat{n, z})\, d\omega - \rho \int_{\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \cos(\widehat{n, z})\, d\omega$$

$$M = \rho g \int_{\Omega} xz \cos(\widehat{n, z})\, d\omega - \rho \int_{\Omega} x \frac{\partial\varphi}{\partial t} \cos(\widehat{n, z})\, d\omega$$

$$m = -Dz_0\theta + \rho g \int_{\Omega} yz \cos(\widehat{n, z})\, d\omega - \rho \int_{\Omega} y \frac{\partial\varphi}{\partial t} \cos(\widehat{n, z})\, d\omega -$$

$$- \rho g \int_{\Omega} z^2 \cos(\widehat{n, y})\, d\omega + \rho \int_{\Omega} z \frac{\partial\varphi}{\partial t} \cos(\widehat{n, y})\, d\omega +$$

$$+ \rho g z_0 \int_{\Omega} z \cos(\widehat{n, y})\, d\omega - \rho z_0 \int_{\Omega} \frac{\partial\varphi}{\partial t} \cos(\widehat{n, y})\, d\omega.$$

§ **3.** При движении судна переменными по времени являются не только $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$, но также значения cos и область интегрирования Ω. Полагая движения судна малыми, будем считать бортовую качку не связанной с двумя другими видами качки.* Что же касается вертикальной и килевой качки, эти два вида, как известно, могут быть связаны при сколь угодно малом движении.

Если уравнение поверхности судна:

$$y = f(x, y)$$

соответствует его положению равновесия, то при всяком отклонении от этого положения поверхность будет выражаться соответственно измененным уравнением.

Так, при одновременном вертикальном перемещении на величину ζ и наклонении вокруг оси OY на угол ψ уравнение поверхности будет:

$$y = f(x \cos\psi + z \sin\psi,\ \zeta + z \cos\psi - x \sin\psi).$$

* Если бы мы не ввели этого априорно известного положения и вели дальнейшие выкладки для одновременного участия судна во всех трех видах качки, то немедленно увидели бы, что при малых движениях судна и воды члены первого порядка малости, выражающие влияние движения в диаметральной плоскости на бортовую качку и обратно, обращаются в нуль, вследствие симметрии судна относительно диаметральной плоскости, и остаются лишь члены высших порядков малости.

Полагая движение судна малым, можем принять

$$\cos\psi = 1; \ \sin\psi = \psi.$$

Так как осадка судна мала по сравнению с его длиной, то величиной $z\psi$ можно пренебречь:

$$y = f(x, z - \zeta - x\psi).$$

При наклонениях вокруг оси OX:

$$y\cos\theta + z\sin\theta = f(x, z\cos\theta - y\sin\theta)$$

или, принимая во внимание малость угла θ:

$$y = f(x, z - y\theta) - z\theta.$$

Вводим следующие преобразования:

$$\cos(\widehat{n, z})\,d\omega = \frac{\partial f}{\partial z}\,dx\,dz$$

$$\cos(\widehat{n, y})\,d\omega = dx\,dz.$$

Область интегрирования приближенно может быть ограничена сверху плоскостью XOY, что не вносит заметной погрешности, так как, во-первых, изменения уровня поверхности малы, во-вторых, давления воды вблизи поверхности имеют наименьшие значения и, в-третьих, борта судна вблизи свободной поверхности обычно близки к вертикальным и, следовательно, вертикальные составляющие гидромеханических воздействий ничтожны.

На этом основании интегрирование по поверхности мы можем заменить двойным интегрированием по длине и по высоте. Пределы интегрирования по длине остаются постоянными и равны $-aL$ и bL, где $b = 1 - a$, причем a — величина меньше единицы, определяющая положение центра тяжести судна по длине. Нижним пределом интегрирования по высоте является, согласно сказанному — нуль; верхний же предел зависит от мгновенного положения наиболее низких точек судна. Там, где под знаком интеграла входит ордината поверхности судна или ее производная, верхний предел может быть взят равным бесконечности, так как за пределами расположения

наинизших точек поверхности подинтегральная функция сама собою обращается в нуль.*

Таким образом, можем написать:

$$Z = D + \rho g \int\limits_0^\infty \int\limits_{-aL}^{bL} z \frac{\partial f(x, z - \zeta - x\psi)}{\partial z} dx\, dz - \rho \int\limits_0^\infty \int\limits_{-aL}^{bL} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial f(x, z - \zeta - x\psi)}{\partial z} dx\, dz$$

$$M = \rho g \int\limits_0^\infty \int\limits_{-aL}^{bL} xz \frac{\partial f(x, z - \zeta - x\psi)}{\partial z} dx\, dz - \rho \int\limits_0^\infty \int\limits_{-aL}^{bL} x \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial f(x, z - \zeta - x\psi)}{\partial z} dx\, dz$$

$$m = -D z_0 \theta + \rho g \int\limits_0^\infty \int\limits_{-aL}^{bL} yz \frac{\partial [f(x, z - y\theta) - z\theta]}{\partial z} dx\, dz - \rho g \int\limits_0^\infty \int\limits_{-aL}^{bL} z^2\, dx\, dz +$$

$$+ \rho g z_0 \int\limits_0^\infty \int\limits_{-aL}^{bL} z\, dx\, dz + \rho \int\limits_0^\infty \int\limits_{-aL}^{bL} y \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial [f(x, z - y\theta) - z\theta]}{\partial z} dx\, dz +$$

$$+ \rho \int\limits_0^\infty \int\limits_{-aL}^{bL} z \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx\, dz - \rho z_0 \int\limits_0^\infty \int\limits_{-aL}^{bL} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx\, dz.$$

§ **4.** Выражения, к которым мы пришли, позволяют усмотреть, что действующие силы и моменты могут быт подразделены на два слагаемых, одно из которых включает силы, зависящие только от положения судна, а второе — также от характера волнения, определяемого функцией φ.

Займемся сначала первым слагаемым. Так как оно не зависит от характера волнения, то его величина остается постоянной и равной тому значению, которое оно имеет при отсутствии волнения; для того, чтобы убедиться в этом достаточно в полученных полных выражениях положить $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$. Это слагаемое, следовательно, представляет собою то, что в теории колебаний именуется восстанавливающей силой.

* При этом следует помнить, что интегрирование необходимо распространить на всю поверхность, т. е. повторить для положительных и отрицательных значений y. Приняв это замечание мы в дальнейшем избавляемся от необходимости выписывать каждый интеграл два раза.

На основании малости отклонений судна можем ввести следующие преобразования:

$$f(x, z - \zeta - x\psi) = f(x, z) - \zeta \frac{\partial f(x, z)}{\partial z} - x\psi \frac{\partial f(x, z)}{\partial z}$$

$$f(x, z - y\theta) = f(x, z) - y\theta \frac{\partial f(x; z)}{\partial z}.$$

Применяем это преобразование к первому слагаемому вертикальной силы, причем функцию $f(x, z)$ для сокращения будем обозначать через f; верхний предел интегрирования по z в этом случае будет постоянным и равным осадке судна T.*

$$Z_1 = D + \gamma \int_0^T \int_{-aL}^{bL} z \frac{\partial f}{\partial z} dx\, dz - \zeta\gamma \int_0^T \int_{-aL}^{bL} z \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dx\, dz - \psi\gamma \int_0^T \int_{-aL}^{bL} xz \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dx\, dz.$$

Нетрудно видеть, что:

$$\int_0^T \int_{-aL}^{aL} z \frac{\partial f}{\partial z} dx\, dz = - V,$$

где V — объемное водоизмещение.

$$\int_0^T \int_{-aL}^{bL} z \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dx\, dz = - S_0,$$

где S_0 — площадь грузовой ватерлинии.

$$\int_0^T \int_{-aL}^{bL} xz \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dx\, dz = lS_0$$

— момент площади грузовой ватерлинии относительно оси OY.

Отсюда:

$$Z_1 = - \gamma S_0 \zeta - \gamma l S_0 \psi.$$

* Вследствие необходимости повторного интегрирования подинтегральная функция, симметричная относительно $y = 0$, обращает интеграл в нуль, антисимметричная — его удваивает

Для килевой качки

$$M_1 = \gamma \int_0^T \int_{-aL}^{bL} xz \frac{\partial f}{\partial z} dx\, dz - \zeta\gamma \int_0^T \int_{-aL}^{bL} xz \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dx\, dz - \psi\gamma \int_0^T \int_{-aL}^{bL} x^2 z \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dx\, dz.$$

Первый член представляет момент статических сил в положении равновесия судна и на спокойной воде равен нулю по существу понятия о равновесии.

Далее имеем:

$$\int_0^T \int_{-aL}^{bL} xz \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dx\, dz = lS_0$$

— статический момент площади грузовой ватерлинии относительно оси OY.

$$\int_0^T \int_{-aL}^{bL} x^2 z \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dx\, dz = j$$

— момент инерции той же площади относительно той же оси.

Отсюда:

$$M_1 = -\gamma l S_0 \zeta - \gamma j \psi = -\gamma l S_0 \zeta - RD\psi,$$

где $R = \frac{j}{V}$ и $D = \gamma V$.

Если бы мы не пренебрегли моментом, вызываемым изменением положения центра тяжести и другими членами того же порядка, то получили бы в этом выражении H вместо R, как видно из дальнейшего вывода m_1.

Итак, для статических сил при вертикальной и килевой качке мы получили в первом приближении известные выражения. Однако, ничто не препятствует, сохранив в разложении f члены высших порядков, получить более высокое приближение.

На этом мы не будем останавливаться, так как этот вопрос в настоящем исследовании играет второстепенную роль, и наша цель в данном случае состоит лишь в том, чтобы вскрыть содержания первых слагаемых.*

* Изучению вида членов, выражающих восстанавливающую силу в последующих приближениях и, следовательно, изучению влияния формы судна посвящена специальная работа: «Остойчивость и качка судов произвольной формы» Г. Павленко, помещенная в № 2 сборника «Теория и практика судостроения», а также и в печатающемся курсе «Качка судов».

Наконец, для бортовой качки:

$$m_1 = -Dz_0\theta + \gamma\int_0^T\int_{-aL}^{bL} yz\frac{\partial f}{\partial z}dx\,dz - \gamma\theta\int_0^T\int_{-aL}^{bL} y^2 z\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dx\,dz +$$

$$+\gamma\theta\int_0^T\int_{-aL}^{bL} yz\,dx\,dz - \gamma\int_0^T\int_{-aL}^{bL} z^2\,dx\,dz + \gamma z_0\int_0^T\int_{-aL}^{bL} z\,dx\,dz.$$

Здесь:

$$\int_0^T\int_{-aL}^{bL} yz\frac{\partial f}{\partial z}dx\,dz = 0$$

$$\int_0^T\int_{-aL}^{bL} y^2 z\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}dx\,dz = i$$

— момент инерции ватерлинии относительно OX.

$$\int_0^T\int_{-aL}^{bL} yz\,dx\,dz = Vz_1$$

— момент объема подводной части судна относительно XOY.

$$\int_0^T\int_{-aL}^{bL} z^2\,dx\,dz = 0 \qquad \int_0^T\int_{-aL}^{bL} z\,dx\,dz = 0.$$

Отсюда:

$$m_1 = -\gamma i\theta + \gamma Vz_1\theta - \gamma Vz_0\theta = -Dh\theta.$$

§ **5.** Вторые слагаемые определяют возмущающее действие произвольного волнения, определяемое скоростным потенциалом φ.

$$Z_2 = -\rho\int_0^\infty\int_{-aL}^{bL}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial f(x, z-\zeta-x\psi)}{\partial z}dx\,dz$$

$$M_2 = -\rho \int_0^{\infty} \int_{-aL}^{bL} x \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial f(x, z - \zeta - x\psi)}{\partial z} dx\, dz$$

$$m_2 = -\rho \int_0^{\infty} \int_{-aL}^{bL} y \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial [f(x, z - y\theta) - z\theta]}{\partial z} dx\, dz +$$

$$+ \rho \int_0^{\infty} \int_{-aL}^{bL} z \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx\, dz - \rho z_0 \int_0^{\infty} \int_{-aL}^{bL} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx\, dz.$$

Пользуясь прежним способом разложения функции f с сохранением первых двух членов разложения, получаем:

$$Z_2 = -\rho \int_0^{T} \int_{-aL}^{bL} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial z} dx\, dz + \rho\zeta \int_0^{T} \int_{-aL}^{bL} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dx\, dz + \rho\psi \int_0^{T} \int_{-aL}^{bL} x \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dx\, dz$$

$$M_2 = -\rho \int_0^{T} \int_{-aL}^{bL} x \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial z} dx\, dz + \rho\psi \int_0^{T} \int_{-aL}^{bL} x^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dx\, dz +$$

$$+ \rho\zeta \int_0^{T} \int_{-aL}^{bL} x \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dx\, dz$$

$$m_2 = -\rho \int_0^{T} \int_{-aL}^{bL} y \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial z} dx\, dz + \rho\theta \int_0^{T} \int_{-aL}^{bL} y^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} dx\, dz +$$

$$+ \rho\theta \int_0^{T} \int_{-aL}^{bL} y \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx\, dz + \rho \int_0^{T} \int_{-aL}^{bL} z \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx\, dz - \rho z_0 \int_0^{T} \int_{-aL}^{bL} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx\, dz.$$

Особенностью полученного решения является прежде всего наличие членов, содержащих произведение координат судна на функцию времени, что можно трактовать следующим образом. При составлении общеизвестных уравнений качки мы считаем восстанавливающую силу на волнении такой же, как и на спокойной воде, в то время, как состояние движения воды вносит некоторое различие и в величину этой силы, выражающееся в том, что при

данной величине отклонения судна к основному значению восстанавливающей силы, вычисляемый по способу гидростатики, добавляется переменный по времени член, характеризующий как бы непрерывное (на правильной волне — периодическое) изменение кажущейся плотности воды или кажущейся силы тяжести.

Введение этого члена в уравнения качки не вносит очень больших сложностей, однако, ввиду малости его по сравнению с основными членами, можно пользоваться нашим решением в упрощенном виде:

$$Z_2 = -\rho \int_0^T \int_{-aL}^{bL} \frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial z}\,dx\,dz$$

$$M_2 = -\rho \int_0^T \int_{-aL}^{bL} x\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial z}\,dx\,dz$$

$$m_2 = -\rho \int_0^T \int_{-aL}^{bL} y\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial z}\,dx\,dz + \rho \int_0^T \int_{-aL}^{bL} z\frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx\,dz - \rho z_0 \int_0^T \int_{-aL}^{bL} \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dx\,dz.$$

В выражении m_2 первый член представляет момент действия вертикальных слагающих, а два вторые члена — горизонтальных слагающих давлений воды. Величина суммы двух последних членов зависит от положения центра тяжести судна по высоте.

II. Правильное волнение, как частный случай

§ **1.** Полученные в главе I интегралы представляют общее решение задачи о нахождении возмущающей силы и моментов при качке судна на море, взволнованном произвольным образом. Применим это решение к известному частному случаю, когда поверхность моря представляется цилиндром синусоидального профиля, перемещающимся с постоянной скоростью в направлении перпендикулярном к образующей. Этот случай является основным в существующих теориях качки судов; рассмотрение его средствами теории качки на произвольном волнении, с одной стороны, позволит проследить те допущения, которые приняты в известных теориях качки,

частью в скрытом виде, а, с другой стороны, даст возможность в некоторых случаях выявить рациональные выражения приближенных поправок, компенсирующих эти допущения.

Пусть в данный момент времени, например, $t = 0$ мы наблюдаем поверхность взволнованного моря, определяемую уравнением

$$F(x, y) = a \cos px.$$

Для этого частного случая имеем известное из теории малых волн на большой глубине выражение потенциала скоростей: *

$$\varphi = ace^{-pz} \sin(\sigma t + px),$$

где:

a — амплитуда (полувысота) волны,
c — скорость поступательного перемещения профиля волны,
σ — частота движения волны,
p — частота формы волны,

причем имеют место зависимости:

$$\sigma = \sqrt{gp}; \quad c = \sqrt{\frac{g}{p}} \text{ и } \sigma c = g.$$

Беря производную потенциала скоростей по времени

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = age^{-pz} \cos(\sigma t + px),$$

и подставляя ее в выражения гл. I, § 5, получаем значения возмущающей силы и моментов:

$$Z_2 = -a\gamma \int_0^T \int_{-aL}^{bL} \frac{\partial f}{\partial z} e^{-pz} \cos(\sigma t + px)\, dx\, dz$$

$$M_2 = -a\gamma \int_0^T \int_{-aL}^{bL} x \frac{\partial f}{\partial z} e^{-pz} \cos(\sigma t + px)\, dx\, dz$$

* Это выражение по заданной форме поверхности для $t = 0$, как частный случай, может быть получено общим методом, изложенным в гл. III.

$$m_2 = -a\gamma \int_0^T \int_{-aL}^{bL} y \frac{\partial f}{\partial z} e^{-pz} \cos(\sigma t + py)\, dx\, dz +$$

$$+ a\gamma \int_0^T \int_{-aL}^{bL} z e^{-pz} \cos(\sigma t + py)\, dx\, dz - a\gamma z_0 \int_0^T \int_{-aL}^{bL} e^{-pz} \cos(\sigma t + py)\, dx\, dz,$$

где $\gamma = \rho g$ — удельный вес воды; в выражении m_2 поверхность воды выражена через $a \cos py$.

§ **2.** Рассмотрим случай бесконечно-малых размеров судна, положенный в основу теории бортовой качки Froude'a. Если положить для этой цели x и z малыми величинами и считать z малым на единицу высшего порядка, чем x, можно принять:

$$e^{-pz} = 1; \quad \cos px = 1; \quad \sin px = px$$

$$Z_2 = a\gamma \int_{-aL}^{bL} f_0\, dx \cos \sigma t - a\gamma p \int_{-aL}^{bL} x f_0\, dx \sin \sigma t = a\gamma S_0 \cos \sigma t - a\gamma pl S_0 \sin \sigma t.$$

Здесь:

f_0 — ордината грузовой ватерлинии.

S_0 — площадь грузовой ватерлинии.

l — расстояние центра тяжести грузовой ватерлинии от вертикали, проходящей через центр тяжести судна.

Первый член полученного выражения совпадает с известным выражением существующей теории качки бесконечно-малого судна. Добавочный член выражает силу поддержания, происходящую вследствие того, что вертикаль, проходящая через центр тяжести ватерлинии, отстоит от центра тяжести судна на расстояние l.

Тем же путем получаем:

$$M_2 = a\gamma \int_{-aL}^{bL} x f_0\, dx \cos \sigma t - a\gamma p \int_{-aL}^{bL} x^2 f_0\, dx \sin \sigma t = a\gamma l S_0 \cos \sigma t - ap D R_0 \sin \sigma t.$$

Здесь:

R_0 — метацентрический радиус $\frac{j}{V}$,

j — момент инерции грузовой ватерлинии $= \int\limits_{-aL}^{bL} x^2 f_0\, dx.$

Основным членом в данном случае является второй, совпадающий с известным выражением, с тем лишь различием, что вместо метацентрической высоты H в нашей формуле стоит R_0.

Первый же член имеет происхождение аналогичное с добавочным членом выражение Z_2.

Если бы мы учитывали момент горизонтальных составляющих давлений, то в выражении второго члена оказалось бы H вместо R, как видно из дальнейшего вывода момента m_2:

$$m_2 = -a\gamma p \int\limits_{-aL}^{bL} y^2 f_0\, dx \sin \sigma t +$$

$$+ a\gamma p \int\limits_0^T \int\limits_{-aL}^{bL} yz\, dx\, dz \sin \sigma t - a\gamma p\, z_0 \int\limits_0^T \int\limits_{-aL}^{bL} y dx\, dz \sin \sigma t = - ap\, D\rho_0 \sin \sigma t +$$

$$+ ap\, Dz_1 \sin \sigma t - ap\, Dz_0 \sin \sigma t = - ap\, Dh_0 \sin \sigma t.$$

В том случае когда l очень невелико, что является частым случаем у судов обычной формы, получаем:

$$Z_2 = a\gamma\, S_0 \cos \sigma t$$

$$M_2 = - ap\, DR_0 \sin \sigma t$$

$$m_2 = - ap\, Dh_0 \sin \sigma t.$$

§ **3.** Следующим приближением в вычислении возмущающей силы является учет конечных размеров судна. Как известно, теория Крылова учитывает влияние конечной длины; Bertin и Smith вводят поправки на влияние конечной осадки судна.

Для того, чтобы получить это приближение из наших общих решений необходимо ввести новое допущение, состоящее в следующем. Будем пред-

ставлять возмущающую силу теми же выражениями, которые были только что получены для бесконечно-малого судна с добавлением некоторого коэффициента k, выражающего влияние конечных размеров судна. При этом допускаем, что этот коэффициент может быть представлен как произведение двух коэффициентов k_1 и k_2, первый из которых выражает только влияние конечной длины судна и вычисляется в предположении отсутствия влияния осадки, а второй выражает влияние конечной осадки и вычисляется в предположении отсутствия влияния длины.

$$Z_2 = k_1 k_2 a\gamma S_0 \cos \sigma t$$
$$M_2 = -k_1 k_2 ap DR_0 \sin \sigma t$$
$$m_2 = -k_1 k_2 ap D\rho_0 \sin \sigma t.$$

Согласно сказанному, вычисляем k_1, в предположении $z = 0$. Для Z_2:

$$k_1 = \frac{-a\gamma \int\limits_0^T \int\limits_{-aL}^{bL} \frac{\partial f}{\partial z} \cos(\sigma t + px)\, dx\, dz}{a\gamma S_0 \cos \sigma t} = \frac{\int\limits_{-aL}^{bL} f_0 \cos(\sigma t + px)\, dx}{S_0 \cos \sigma t}.$$

Для M_2:

$$k_1 = \frac{-\alpha\gamma \int\limits_0^T \int\limits_{-aL}^{bL} x \frac{\partial f}{\partial z} \cos(\sigma t + px)\, dx\, dz}{-ap DR_0 \sin \sigma t} = \frac{-\gamma \int\limits_{-aL}^{bL} x f_0 \cos(\sigma t + px)\, dx}{pD R_0 \sin \sigma t}.$$

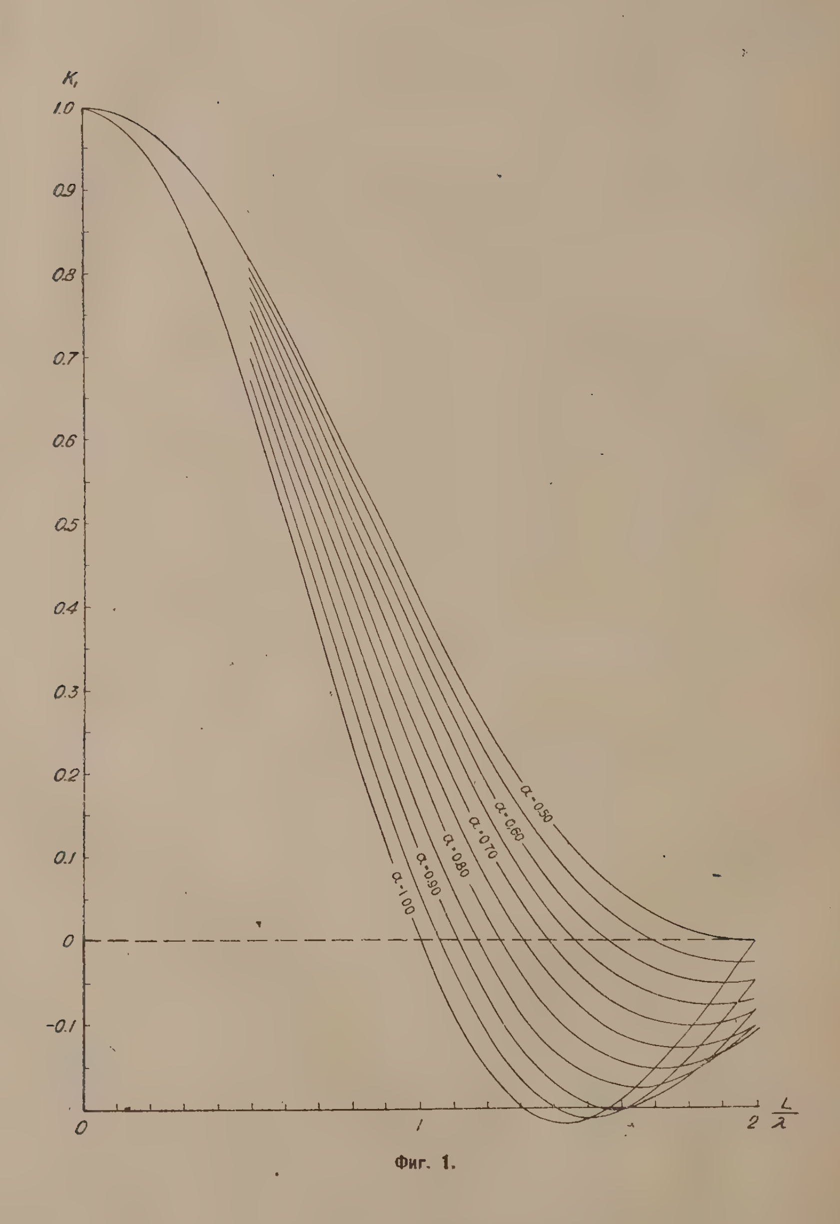
Для первого члена m_2:

$$k_1 = \frac{-a\gamma \int\limits_0^T \int\limits_{-aL}^{bL} y \frac{\partial f}{\partial x} \cos(\sigma t + py)\, dx\, dz}{-ap D\rho_0 \sin \sigma t} = \frac{-\gamma \int\limits_{-aL}^{bL} y f_0 \cos(\sigma t + py)\, dx}{p D\rho_0 \sin \sigma t}.$$

Для судна, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, коэффициент k_1 приобретает следующие значения:

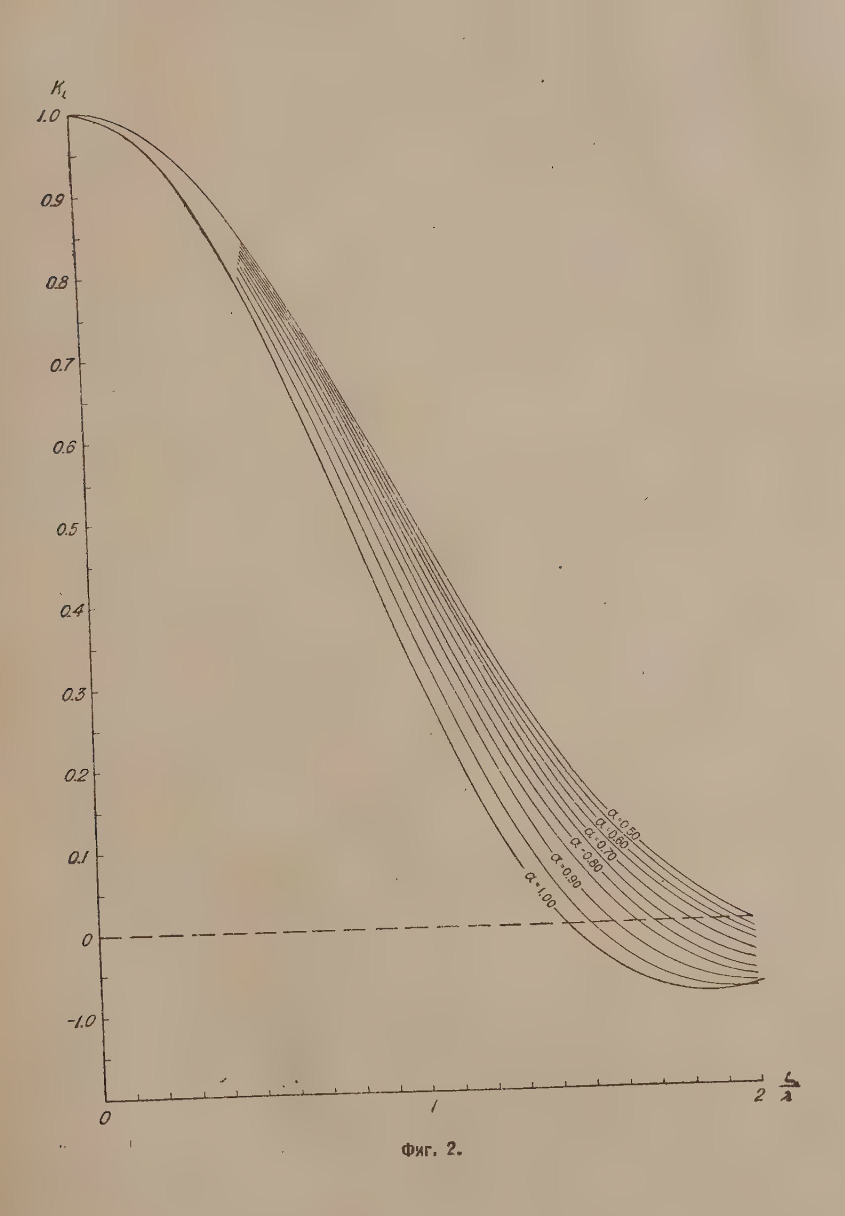
Для Z_2:

$$k_1 = \frac{\sin l_0}{l_0}.$$



K_1
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-0.1
0
1
2
$\frac{L}{\lambda}$
α=0.50
α=0.60
α=0.70
α=0.80
α=0.90
α=1.00

Фиг. 1.



K_t
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-1.0
0
1
2
α=0.50
α=0.60
α=0.70
α=0.80
α=0.90
α=1.00

Фиг. 2.

Для M_2:

$$k_1 = \frac{3}{l_0^3}(\sin l_0 - l_0 \cos l_0).$$

Для m_2:

$$k_1 = \frac{3}{b_0^3}(\sin b_0 - b_0 \cos b_0),$$

где:

$$l_0 = \frac{\pi L}{\lambda}, \quad b_0 = \frac{\pi B}{\lambda}$$

и λ — длина волны.

Для судна, грузовая ватерлиния которого задана уравнением параболы степени n:

$$f_0 = \pm \frac{B}{2}\left[1 - \left(\frac{x}{\frac{1}{2}L}\right)^n\right]$$

коэффициент k_1 принимает значения приведенные в виде кривых в функции от $\frac{L}{\lambda}$ для различных коэффициентов полноты ватерлинии α на диаграммах: фиг. 1 — для вертикальной качки и фиг. 2 — для килевой качки. Данные последней диаграммы могут быть приближенно применены для бортовой качки.

§ 4. Вычисление k_2 ведем в предположении: x — бесконечно мало:

Для Z_2:

$$k_2 = \frac{-a\gamma \int\limits_0^T \int\limits_{-aL}^{bL} \frac{\partial f}{\partial z} e^{-pz}\, dx\, dz \cos \sigma t}{a\gamma S_0 \cos \sigma t} = \frac{-\int\limits_0^T e^{-pz} \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{-aL}^{bL} f\, dx\, dz}{S_0} = \frac{-\int\limits_0^T \frac{\partial S}{\partial z} e^{-pz}\, dz}{S_0}.$$

Для M_2:

$$k_2 = \frac{+a\gamma p \int\limits_0^T \int\limits_{-aL}^{bL} x^2 \frac{\partial f}{\partial z} e^{-pz}\, dx\, dz \sin \sigma t}{-ap\, DR_0 \sin \sigma t} = \frac{-\int\limits_0^T e^{-pz} \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{-aL}^{bL} x^2 f\, dx\, dz}{j_0} =$$

$$= \frac{-\int\limits_0^T \frac{\partial j}{\partial z} e^{-pz}\, dz}{j_0},$$

где: j — момент инерции ватерлиний относительно поперечной оси (ватерлиния предполагается симметричной)

$$j_0 = j \text{ при } z = 0.$$

Для первого члена m_2:

$$k_2 = \frac{+ a\gamma p \int_0^T \int_{-aL}^{bL} y^2 \frac{\partial f}{\partial z} e^{-pz}\, dx\, dz \sin \sigma t}{- ap D\rho_0 \sin \sigma t} = \frac{- \int_0^T e^{-pz} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{3} \int_{-aL}^{bL} f^3\, dx\, dz}{i_0} =$$

$$= \frac{- \int_0^T \frac{\partial i}{\partial z} e^{-pz}\, dz}{i_0},$$

где: i — момент инерции ватерлиний относительно продольной оси; $i_0 = i$ при $z = 0$.

Для судна, у которого строевая по ватерлиниям выражается параболой степени n,

$$S = S_0 \left[1 - \left(\frac{z}{T} \right)^n \right],$$

значения k_2 для Z_2 получаются в форме ряда:

$$k_2 = 1 - pT \frac{n}{n+1} + \frac{p^2 T^2}{1 . 2} \frac{n}{n+2} \ldots$$

Для получения значений того же коэффициента для M_2 и m_2, приняты приближенные зависимости:

$$j = AS; \quad i = BS^3,$$

которые являются совершенно точными для такого судна, у которого различные ватерлинии получены изменением поперечного масштаба одной и той же кривой. При этом значения k_2 для M_2 совпадают, очевидно, с таковыми для Z_2. Значения этого коэффициента для m_2 получаются в форме ряда:

$$k_2 = 1 - pT \frac{6n^3}{(n+1)(2n+1)(3n+1)} + \frac{p^2 T^2}{1 . 2} \frac{6n^3}{(n+2)(2n+2)(3n+2)} \ldots$$

§ **5.** Остается получить поправочный коэффициент k_3 для второго и третьего члена выражения m_2. В общем случае этот коэффициент является отношением:

$$k_3 = \frac{a\gamma\left[\int\limits_0^T\int\limits_{-aL}^{bL} ze^{-pz}\sin py\,dx\,dz - z_0\int\limits_0^T\int\limits_{-aL}^{bL} e^{-pz}\sin py\,dx\,dz\right]\sin\sigma t}{ap\,D(z_1 - z_0)\sin\sigma t}.$$

Для судна, имеющего форму параллелепипеда, имеем:

$$y = \pm\frac{B}{2}$$

$$k_3 = \frac{2\gamma\,L\sin\frac{pB}{2}\left[\int\limits_0^T ze^{-pz}\,dz - z_0\int\limits_0^T e^{-pz}\,dz\right]}{pD(z_1 - z_0)}.$$

Коэффициент 2 взят здесь вместо упомянутого в § 3 главы I повторного интегрирования. Интегрируя, получаем:

$$k_3 = \frac{2\gamma\,L\sin p\frac{B}{2}\left[\frac{1 - e^{-pT} - pTe^{-pT} - pz_0\left(1 - e^{-pT}\right)}{p^2}\right]}{pLBT\left(\frac{T}{2} - z_0\right)}.$$

Выражение в скобках может быть заменено посредством:

$$p\left(1 - e^{-pT}\right)\left(\frac{T}{2} - z_0\right)$$

пренебрегая членами с высшими степенями pT, наибольший из которых равен $\frac{p^2T^2}{4}$, получаем:

$$k_3 = \frac{\sin\frac{pB}{2}}{\frac{pB}{2}}\,\frac{1 - e^{-pT}}{pT}.$$

Таким образом для амплитуды момента m_2 имеем следующее приближенное выражение:

$$m_2 = -ap\,D\left[k_1 k_2 \rho_0 - k_3(z_1 - z_0)\right].$$

Полученные в этой главе выводы явились результатом применения общей теории качки на произвольной волне к частному случаю правильной синусоидальной волны и дополнительного ряда допущений, имеющих целью приблизить наши решения к выводам, известным из существующих теорий качки на правильной волне. Попутно мы имели возможность вскрыть смысл и значение этих допущений и дать рационально выведенные поправочные коэффициенты.

III. Определение потенциала скоростей по начальной форме поверхности взволнованной воды

§ **1.** Пусть поверхность воды в данный момент задана уравнением:

$$Z = F(x, y).$$

Обычным и необходимым допущением является принятие малой высоты волн по сравнению с их горизонтальными размерами, которое в нашем общем случае выражается малой величиной производных:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Кроме того, будем считать, что общая картина волнения представляется рядом как угодно размещенных гребней и впадин различной величины и очертания, но сильно вытянутых в направлении какой-либо одной из горизонтальных осей, например, OY, что соответствует наблюдаемым в действительности формам волнения, при общем перемещении волн, обычно совпадающем с направлением ветра, вдоль оси OX.

Это условие аналитически может быть выражено малой величиной производной $\frac{\partial F}{\partial y}$ по сравнению с производной $\frac{\partial F}{\partial x}$.

§ **2.** Выражение потенциала скоростей будем иметь в виде функции:

$$\varphi(x, y, z, t),$$

которая для некоторого момента времени, например, $t = 0$ удовлетворяет условию формы свободной поверхности $F(x, y)$.

Уравнение Лапласа, которому должна удовлетворять функция φ, имеем вид:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial_2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

В силу сделанного нами допущения, величина $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ будет малой по сравнению с двумя другими слагаемыми и уравнение Лапласа может быть написано в форме:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Предполагая глубину воды неограниченной и движение на бесконечной глубине отсутствующим, мы получаем второе условие:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

при $z = \infty$;
откуда:

$$\varphi_{z=\infty} = \text{const.}$$

Так как к потенциалу скоростей можно прибавить любое постоянное число, для удобства будем считать, что при бесконечном z функция $\varphi = 0$.

Наконец, третьим условием, является динамическое условие на поверхности:

$$P_{z=F} = \text{const.}$$

Общее решение, одновременно удовлетворяющее всем перечисленным условиям, может быть написано в одной из следующих двух форм:

1. $$\varphi = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A_k(y)\, e^{-kz + i\,(kx + \sqrt{kg}\, t)}$$

2. $$\varphi = \int_0^\infty a(k, y)\, e^{-kz + i\,(kx + \sqrt{kg}\, t)}\, dk.$$

§ **3.** Для того, чтобы эти выражения могли быть получены по заданной форме поверхности воды, надо иметь возможность определять в первом случае коэффициенты A и во втором случае функции $a\,(k, y)$ через $F\,(x, y)$.

Условие, связывающее форму поверхности воды с потенциалом скоростей, приближенно состоит в следующем:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

при $z = 0$.

Отсюда:

1. $$\frac{\partial F}{\partial t} = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} - k A_k(y) e^{i(kx + \sqrt{kg}\,t)} \quad F = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} i \sqrt{\frac{k}{g}} A_k(y) e^{i(kx+\sqrt{kg}\,t)}.$$

2. $$\frac{\partial F}{\partial t} = -\int_0^\infty k a(k, y) e^{i(kx+\sqrt{kg}\,t)} dk \quad F = i \int_0^\infty \sqrt{\frac{k}{g}} a(k, y) e^{i(kx+\sqrt{kg}\,t)} dk.$$

Искомые зависимости устанавливаются согласно теории Fourrier:

1. $$A_k(y) = -\frac{i}{l} \sqrt{\frac{g}{k}} \int_0^l F_{t=0}(\xi, y) e^{-ik\xi} d\xi$$

2. $$a(k, y) = -\frac{i}{\pi} \sqrt{\frac{g}{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{t=0}(\xi, y) e^{-ik\xi} d\xi.$$

После подстановки получаем:

1. $$\varphi = -\frac{i}{l} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \sqrt{\frac{g}{k}} \int_0^l F_{t=0}(\xi, y) e^{-kz+i(kx-k\xi+\sqrt{kg}\,t)} d\xi$$

2. $$\varphi = -\frac{i}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} F_{t=0}(\xi, y) \sqrt{\frac{g}{k}} e^{-kz+i(kx-k\xi+\sqrt{kg}\,t)} d\xi\, dk.$$

Откуда:

1. $$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{g}{l} \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \int_0^l F(\xi, y) e^{-kz+i(kx-k\xi+\sqrt{kg}\,t)} d\xi$$

2. $$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{g}{\pi} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} F(\xi, y) e^{-kz+i(kx-k\xi+\sqrt{kg}\,t)} d\xi\, dk.$$

Таким образом, форма поверхности воды, заданная для какого-либо одного момента времени, позволяет получить выражение потенциала ско-

ростей для всего последующего (и предыдущего) времени, и притом в форме чрезвычайно удобной для анализа, как будет видно из дальнейшего.

Следует отметить, что рассмотренный случай является не вполне общим, так как относится к волнам, вызванным на поверхности воды бесконечного протяжения посредством импульсов, имеющих одно и то же направление перемещения, как например, посредством ветра определенного направления. В том случае, когда волны имеют возможность отразиться от твердой стенки или вызваны импульсами, перемещающимися то в одном, то в другом направлении, следует в выражение потенциала добавить такие же члены, но в показателе степени e принять $\sqrt{kg}\,t$ со знаком —, а выражение коэффициентов через уравнение поверхности воды искать по заданиям ее для двух моментов времени:* $F(x, y, z, t_1)$ и $F(x, y, z, t_2)$, в связи с чем анализ несколько усложнится.

В исследованиях качки на волнении, вызванном действием ветра, этот общий случай не играет роли.

§ **4.** Изложенный в § 3 метод нетрудно распространить на случай волнения на мелкой воде. При этом взамен условия на бесконечной глубине должно быть включено условие на дне водоема: $\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$ при $z = h$, где h — глубина водоема.

Потенциал скоростей для этого случая будет:

1. $$\varphi = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} A_k(y) \frac{e^{k(z-h)} + e^{-k(z-h)}}{e^{kh} - e^{-kh}} e^{i(kx + \sqrt{kg \operatorname{tgh} kh}\, t)}$$

2. $$\varphi = \int_0^\infty a(k, y) \frac{e^{k(z-h)} + e^{-k(z-h)}}{e^{kh} - e^{-kh}} e^{i(kx + \sqrt{kg \operatorname{tgh} kh}\, t)}\, dk$$

$$A_k(y) = -\frac{i}{l}\sqrt{\frac{g \operatorname{tgh} kh}{k}} \int_0^l F_{t=0}(\xi, y)\, e^{-ik\xi}\, d\xi$$

$$a(k, y) = -\frac{i}{\pi}\sqrt{\frac{g \operatorname{tgh} kh}{k}} \int_{-\infty}^{+\infty} F_{t=0}(\xi, y)\, e^{-ik\xi}\, d\xi.$$

* Или по заданиям формы F и скоростей $\frac{\partial F}{\partial t}$ денивелляции поверхности для одного момента времени.

Отсюда:

1. $$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{g}{l}\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty}\frac{e^{k(z-h)}+e^{-k(z-h)}}{e^{kh}+e^{-kh}}\int_0^l F_{t=0}(\xi, y)\,e^{i\left(kx-k\xi+\sqrt{kg\,\mathrm{tgh}\,kh}\,t\right)}\,d\xi$$

2. $$\frac{\partial\varphi}{\partial t}=\frac{g}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}F_{t=0}(\xi, y)\frac{e^{k(z-h)}+e^{-k(z-h)}}{e^{kh}+e^{-kh}}e^{i\left(kx-k\xi+\sqrt{kg\,\mathrm{tgh}\,kh}\,t\right)}\,d\xi\,dk.$$

Если судно совершает поступательное движение вдоль оси OX со скоростью v, то в выражение $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$ следует вместо координаты x ввести $x+vt$.

IV. Движение судна на произвольной волне

§ **1.** Сопоставляя результаты, полученные в главах I и III, напишем полные выражения для возмущающей силы и моментов испытываемых судном заданной формы:

$$y=f(x, z)$$

на волнении заданном формой поверхности воды для одного момента $t=0$:

$$z=F(x, y)$$

$$Z_2=-\frac{\gamma}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_{-aL}^{bL}F(\xi, y)\frac{\partial f(x, z)}{\partial z}e^{-kz+i\left(kx-k\xi+\sqrt{kg}\,t\right)}\,dx\,dz\,d\xi\,dk$$

$$M_2=-\frac{\gamma}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_{-aL}^{bL}F(\xi, y)\frac{\partial f(x, z)}{\partial z}xe^{-kz+i\left(kx-k\xi+\sqrt{kg}\,t\right)}\,dx\,dz\,d\xi\,dk$$

$$m_2=-\frac{\gamma}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_{-aL}^{bL}F(x, \eta)\frac{\partial f(x, z)}{\partial z}ye^{-kz+i\left(kx-k\xi+\sqrt{kg}\,t\right)}\,dx\,dz\,d\xi\,dk+$$

$$+\frac{\gamma}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_{-aL}^{bL}F(x, \eta)\,ze^{-kz+i\left(kx-k\xi+\sqrt{kg}\,t\right)}\,dx\,dz\,d\xi\,dk-$$

$$-\frac{\gamma z_0}{\pi}\int_0^\infty\int_{+\infty}^{+\infty}\int_0^T\int_{-aL}^{bL}F(x, \eta)\,e^{-kz+i\left(kx-k\xi+\sqrt{kg}\,t\right)}\,dx\,dz\,d\xi\,dk.$$

Такие же выражения можно написать для иной формы представления — через знак суммирования Σ. Точно так же не составит никакого труда распространить эти выражения на случай ограниченной глубины воды.

§ **2.** Если ввести обозначения:

$\frac{D}{g}$ — масса судна.

J — момент инерции масс относительно поперечной оси.

I — » » » » продольной »

ω_1 — частота свободных вертикальных колебаний судна.

ω_2 — » » продольных » »

ω_3 — » » поперечных » »

то уравнения движения судна при отсутствии сопротивления в решенном виде могут быть написаны в следующей форме: *

$$\zeta = -\frac{\gamma g}{\pi D}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{T}\int\limits_{-aL}^{bL} F\frac{\partial f}{\partial z}\frac{e^{\varkappa}}{1-\frac{kg}{\omega_1^2}}\,dx\,dz\,d\xi\,dk$$

$$\psi = -\frac{\gamma}{\pi J}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{T}\int\limits_{-aL}^{bL} F\frac{\partial f}{\partial z}\frac{xe^{\varkappa}}{1-\frac{kg}{\omega_2^2}}\,dx\,dz\,d\xi\,dk$$

$$\theta = -\frac{\gamma}{\pi I}\int\limits_0^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{T}\int\limits_{-aL}^{bL} F\frac{\partial f}{\partial z}\frac{(y-z+z_0)\,e^{\varkappa}}{1-\frac{kg}{\omega_3^2}}\,dx\,dz\,d\eta\,dk,$$

где: $\varkappa = -kz + i\,(kx - k\xi + \sqrt{kg}\,t)$.

§ **3.** По такой же системе могут быть составлены несколько более длинные уравнения движения судна при наличии сопротивления пропорционального первой степени абсолютной или относительной скорости. Разница будет состоять лишь в том, что вместо выражения:

$$\frac{1}{1-\frac{kg}{\omega^2}}$$

* В общем случае к этому должен быть добавлен член выражающий собственные колебания, составляемый известным способом.

войдет, в случае сопротивления пропорционального абсолютной скорости:

$$\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{kg}{\omega^2}\right)^2+4\,\frac{\mu^2\,kg}{\omega^4}}}$$

в случае сопротивления пропорционального относительной скорости:

$$\sqrt{\frac{1+4\,\frac{\mu^2\,kg}{\omega^4}}{\left(1-\frac{kg}{\omega^2}\right)^2+4\,\frac{\mu^2\,kg}{\omega^4}}}$$

и в показателе степени e дополнительный член, в первом случае:

$$-i\operatorname{arctg}\frac{2\,\frac{\mu\sqrt{kg}}{\omega^2}}{1-\frac{kg}{\omega^2}}$$

во втором случае:

$$i\operatorname{arctg}\frac{2\mu\sqrt{kg}}{\omega^2}-i\operatorname{arctg}\frac{2\,\frac{\mu\sqrt{kg}}{\omega^2}}{1-\frac{kg}{\omega^2}}.$$

Здесь μ — декремент свободных затухающих колебаний.

§ **4.** Значительное упрощение может быть введено в том случае, когда волна, обладающая попрежнему произвольной формой профиля, ограничена условием цилиндричности в направлении перпендикулярном направлению движения. При этом функция F может быть вынесена за знак интегрирования по x и z.

Применяя выводы полученные в главе III мы можем выражения § 2 настоящей главы написать в приближенной форме:

$$\zeta=\frac{\gamma g S_0}{\pi D}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}k_1 k_2\,\frac{F}{1-\frac{kg}{\omega_1^2}}\cos\left(k\xi-\sqrt{kg}\,t\right)d\xi\,dk$$

$$\psi=\frac{DR_0}{\pi J}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}k_1 k_2\,\frac{kF}{1-\frac{kg}{\omega_2^2}}\sin\left(k\xi-\sqrt{kg}\,t\right)d\xi\,dk$$

$$\theta=\frac{D}{\pi I}\int_0^{\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left[k_1 k_2\,\rho_0-k_3(z_1-z_0)\right]\frac{kF}{1-\frac{kg}{\omega_3^2}}\sin\left(k\xi-\sqrt{kg}\,t\right)d\xi\,dk.$$

Значения k_1, k_2 и k_3 для различных значений $\frac{L}{\lambda} = \frac{kL}{2\pi}$ берутся по данным главы III.

Особенно простой вид принимают эти выражения в случае судна бесконечно малых размеров, когда $k_1 = k_2 = k_3 = 1$.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

ИЗМЕНЕНИЕ БИОХИМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ПОЧВЕ ПОД ВЛИЯНИЕМ КУЛЬТУРЫ КЛЕВЕРА[1]

Н. Н. СУШКИНОЙ

(*Представлено академиком* С. П. Костычевым)

Жизнь бактерий тесно и неразрывно связана с той средой, которую они населяют. Все те факторы, которые так или иначе изменяют жизненный режим почвы, отражаются на деятельности микроорганизмов. Растение может влиять на почвенную микрофлору, изменяя в почве условия для жизни бактерий, иссушая почву, обогащая или обедняя ее теми или иными питательными веществами и изменяя ее физические свойства.

Возможно также и прямое воздействие корневых выделений растений на почвенных микробов. С другой стороны, та или иная микрофлора, та или иная интенсивность работы различных физиологических групп почвенных бактерий может повести к большим изменениям в химических свойствах почвы.

Последнее во многих случаях даст растениям возможность утилизировать те вещества, которые раньше им не были доступны, и может существенно изменить условия их питания и роста. Таким образом, бактериальный мир, сам находящийся в зависимости от высших растительных форм, становится элементом, определяющим жизнь и развитие последних.

И, наконец, почва, изменяющая свои физические и химические свойства под действием как растений, так и микроорганизмов, в свою очередь способна влиять на жизнь растительного мира и почвенной микрофлоры.

[1] Настоящая работа была выполнена в лаборатории и на средства Агрохимического отдела Носовской с.-х. опытной станции, куда летом 1929 г. я была командирована Почвенным институтом Академии Наук по представлению его директора и руководителя работ Агрохимического отдела Носовской станции акад. К. К. Гедройца.

Настоящее исследование ставит себе целью проследить на одном частном примере — введения в севооборот носовских почв клевера — ту сложную систему связей, которая существует между свойствами почвы как субстрата и протекающими в ней жизненными процессами высших и низших организмов.

Все необходимые данные по генезису и агрохимии, а также по вопросу о влиянии культуры клевера на свойства носовских почв сосредоточены со всею полнотой в трудах акад. К. К. Гедройца (1—8)[1] и частично (агрохимическая характеристика и изменение под действием клевера) изложены в работах сотрудников Носовской опытной станции Ф. Н. Германова и В. Г. Тарановской (9—11). Последними произведены также первые исследования некоторых биохимических процессов, протекающих в этих почвах, и влияния на них культуры клевера (9, 12, 13). Из замеченных этими авторами интересных особенностей и возникла мысль о настоящей работе, которая должна была по идее К. К. Гедройца провести исследование более детально и снабдить его по возможности количественным материалом.

I. Обзор имеющихся данных об общих свойствах носовских почв

Генезис носовских почв[2]

Носовская опытная станция лежит в той части низины, образованной Днепром, которая в ледниковый период была занята так называемым днепровским ледниковым языком. Почвенная карта этого района обнаруживает чрезвычайную пестроту почвенных типов этой местности — от небогатых гумусом черноземов (5% гумуса) до совершенно оподзоленных серых почв и указывает на широкое распространение солонцов и солонцеватых почв по всей области днепровского языка. Это непонятное разнообразие почвенных вариаций, образовавшихся при почти одних и тех же климатических условиях на сравнительно ограниченной территории, получило свое объяснение в теории К. К. Гедройца относительно происхождения почв этого района.

Акад. К. К. Гедройц считает, что в прежние времена воздействие растворов натриевых солей было, повидимому, преобладающим явлением для почвенного покрова всего днепровского языка. Соответственно этому, как

[1] Цифры в скобках указывают на номера трудов, приведенных в списке литературы (см. стр. 1252).

[2] См. работы К. К. Гедройца (2, 3, 4, 5, 6, 7, 8).

следующая стадия эволюции таких почв, солонцы и солонцеватые почвы, которые в настоящее время встречаются лишь пятнами среди других разностей почв, были раньше распространены гораздо более широко. Что же касается современных почв днепровского ледникового языка, то в большинстве случаев они представляют собою, по этой теории, рассолонцевавшиеся солонцеватые почвы различных степеней осолодения, от черноземовидных почв до типичных солодей.

Таким образом, в почвенном отношении область днепровского ледникового языка представляет собою область, объединенную одинаковым генезисом своего почвенного покрова, что предполагает тесную генетическую связь между несолонцеватыми в настоящее время почвами области днепровского ледникового языка и географически близкими им солонцами.

Интересующий же нас частный случай — черноземовидные, несолонцеватые в настоящее время почвы района Носовской опытной станции относятся К. К. Гедройцем к рассолонцевавшимся черноземным карбонатным солонцеватым почвам этого района (2, стр. 38, и 4, стр. 41).[1]

Физические и химические свойства носовских черноземов

Как физические, так и химические свойства несолонцеватых почв района Носовской опытной станции, известных также в литературе под именем носовских черноземов, тесно связаны с генезисом этих почв и всецело объясняются их прошлым. Как указывалось выше, носовские черноземы возникли в результате осолодения солонцеватых и в то же время карбонатных черноземных почв (2, стр. 38, и 4, стр. 41). Их карбонатность имеет большое значение, так как процесс рассолонцевания протекает различно в присутствии и в отсутствии кальция. Как известно, солонцеватость почв вызывается наличием натрия в их поглощающем комплексе, что способствует растворяющему и разрушающему действию воды на почвенный поглощающий комплекс. В присутствии поглощенного натрия почвенные частицы коллоидальных размеров как органические, так и минеральные перестают быть связан-

[1] Другие взгляды на образование этих почв исходят преимущественно из геологических данных (Махов, Соболев), по которым этот процесс протекал, видимо, очень сложно в смысле отдельных фаз своего развития. Но, как нам кажется, это не противоречит изложенной схеме К. К. Гедройца. Наблюдения над колебанием грунтовых вод, происходящим и в настоящее время в связи с изменениями уровня Днепра, наоборот, подтверждают высказываемое К. К. Гедройцем предположение о возможности былого засоления почвенного покрова области днепровского языка.

ными между собой в прочные структурные элементы. Вследствие этого они утрачивают способность противостоять разрушающему действию воды и распыляются до отдельных самостоятельных частиц, которые могут образовывать коллоидальные растворы. В результате, при процессе осолодения солонцеватых почв наблюдается вымывание из почвы гумуса и разрушение алюмосиликатного ядра почвы. Первое может повести иногда к почти полному удалению гумуса из почвы, второе к усиленному вымыванию кремнекислоты и полуторных окислов в нижележащие горизонты. Этот процесс и называется осолодением. Если последнее происходит в присутствии кальция, который, как известно, является сильным коагулятором и способен парализовать распыляющее действие натрия, то само собою понятно, что кальций, становясь на место вымываемого из поглощающего комплекса натрия, будет препятствовать дальнейшему развитию упомянутых процессов, и разрушение поглощающего комплекса не пойдет так далеко, как в случае осолодения бескарбонатных солонцов.

Таким образом, получится рассолонцевавшаяся почва гораздо более близкая по своим химическим свойствам к тем несолонцеватым почвам, из которых она произошла, и гораздо менее обесцененная, чем в случае бескарбонатных солонцов. Такое именно сочетание условий мы имеем в носовских черноземах. Благодаря защитному действию углекислого кальция здесь наблюдается меньшее обеднение гумусом, чем это могло бы быть, и не происходит заметного разрушения алюмосиликатного ядра (накопления аморфной кремнекислоты не наблюдается ни в одном горизонте, (2, стр. 38); точно так же полуторные окислы не только не скопляются, но даже несколько убывают книзу (2, стр. 39).

Все только что изложенное дает исчерпывающее и стройное объяснение причин возникновения тех основных свойств носовских черноземов, знакомство с которыми нам понадобится в дальнейшем для правильного понимания особенностей протекания биохимических процессов в этих почвах, и которые мы можем коротко формулировать следующим образом:

1. Количество гумуса в носовских почвах по сравнению с нормальными черноземами (не солонцеватыми и не деградированными) очень низко — около 3.5% (4, стр. 12). В этом отношении носовские черноземы приближаются к почвам подзолистого типа, отличаясь от последних характером гумуса и распределением его на значительно бо́льшую глубину.

2. Обеднение гумусом идет в первую очередь за счет вымывания наиболее дисперсной и наиболее легко переходящей в зольное состояние части органического поглощающего комплекса. Так в нормальных черноземах на окисление водно-растворимого гумуса, извлекаемого из 100 г почвы, идет в среднем 75 куб. см 0.05 норм. раствора $KMnO_4$, в сильно солонцеватых почвах до 3000 куб. см и в носовских рассолонцевавшихся черноземах всего лишь — 26.8 куб. см[1] (2, стр. 8, и 9, стр. 19). Таким образом, современные условия для питания растений, точно так же как для питания и деятельности бактерий в носовских почвах, утративших полностью обменный натрий, не могут считаться благоприятными. Бо́льшая часть уцелевшего от выщелачивания органического вещества плохо растворима, мало подвижна и, следовательно, мало доступна для микроорганизмов в качестве питательного материала и трудно разлагается ими.

3. Минерализация сохранившегося в процессе рассолонцевания органического азота протекает слабо (4, стр. 55). Вследствие этого сравнительно большие запасы общего азота, которые могли бы обеспечить хорошие урожаи втечение продолжительного времени, находятся в почве в малодоступной для растений форме.

4. В отношении насыщенности основаниями поглощающего комплекса акад. К. К. Гедройц относит носовские черноземы к почвам в этом смысле переходным. Их верхние горизонты периодически являются то насыщенными, то ненасыщенными основаниями, в зависимости от поднятия в них углесолей кальция и магния из нижних слоев почвы. В случае ненасыщенного состояния поглощающего комплекса степень ненасыщенности почвы выражается очень малой величиной (4, стр. 60).

5. pH для носовских почв в среднем равно 6.5 (9, стр. 21).

6. Почвы бесструктурны. Процесс рассолонцевания в носовских черноземах, видимо, дошел до конца, и в поглощающем комплексе исследовавшихся носовских почв найдены только кальций и магний (4, стр. 12). Однако, это обстоятельство не повело в носовских почвах к восстановлению свойственной нормальным черноземам структуры. Несмотря на карбонатность исходного материала коллоидальная, цементирующая часть почвы, которая склеивает отдельные почвенные частицы в аггрегаты и придает почве структуру, была настолько вымыта в процессе рассолонцевания носовских почв, что вторичное вхождение кальция в поглощающий комплекс не смогло повлечь за собой

[1] Цифра пересчитана на 0.05 нормальный раствор $KMnO_4$.

восстановления почвенной структуры.[1] Механический анализ носовских почв обнаруживаст в их составе до 90% пылеватых и глинистых частиц (частицы от 0.05 до 0.001 мм) и только около 6% илистой Фракции (частицы от 0.001 мм и мельче; 9, стр. 20).

7. Физические свойства неблагоприятны. Воздушный и водный режим неудовлетворительны. Как известно, бесструктурные почвы по сравнению с почвами структурными отличаются преобладанием капиллярной скважности над некапиллярной. Для сравнения можно указать, что в носовских почвах в пахотном горизонте капиллярная скважность приблизительно в 10 раз больше некапиллярной (10, стр. 15), тогда как, например, в харьковском черноземе отношение капиллярной скважности к некапиллярной может быть близким к единице (9, стр. 16). Преобладание же капиллярной скважности ведет к уменьшению водопроницаемости почвы, усиливает испарение и, что особенно важно для нас, значительно ухудшает аэрацию, которая происходит, главным образом, по широким некапиллярным ходам.

8. Санитарные условия для организованной жизни в почве, непосредственно зависящие от воздушного и водного режима, неудовлетворительны. Разложение различных веществ при недостаточном доступе воздуха, особенно же органических соединений, ведет к образованию в почве разнообразных недоокисленных продуктов распада, вредно действующих на растения (4, стр. 52). Повидимому, это заключение можно распространить и на бактерии (см. ниже главы III и IV).

9. Наибольшее количество таких недоокисленных, вредных веществ скопляется в носовских почвах в подпахотном горизонте, вследствие плохой аэрации этого горизонта при условии еще достаточного содержания в нем органического вещества. Проветривание верхнего пахотного слоя будет лучше вследствие бо̀льшей близости его к атмосферному воздуху, а также постоянного разрыхления при обработке. В нижних же горизонтах образование вредных соединений ограничивается малым содержанием в них гумуса и несравненно меньшим количеством отмирающих в этих горизонтах корней растений. Кроме того на этой глубине, вследствие сравнительной близости к материнской породе, уже имеются углесоли кальция и магния, которые способны уменьшать ядовитость недоокисленных соединений (4, стр. 52).

[1] Коллоидальная фракция в нормальных несолонцеватых черноземах составляет приблизительно 35%, в то время как в носовских черноземах количество ее уменьшается примерно до 3% (9, стр. 20).

Влияние культуры клевера на почвы носовского опытного поля

Носовской сельско-хозяйственной станцией чисто опытным путем было установлено, что введение клевера в севооборот на полях носовского района повышало урожай (9, стр. 36) и явно увеличивало использование этими почвами атмосферных осадков (4, стр. 62—63, и 10, стр. 7—12).[1] Отсюда естественно возникло предположение, что клевер, помимо того влияния, которое он оказывает на почву как бобовое растение, обогащая почву азотом, воздействует на физические свойства почвы, улучшая их, и что в этом последнем состоит главное значение влияния культуры клевера на носовские черноземы. Дальнейшие исследования в этом направлении Носовской опытной станции привели к следующим выводам:

1. Клевер улучшает структуру почвы.

2. Вследствие такого улучшения значительно возрастает аэрация почвы и улучшается водный режим — увеличивается водопроницаемость и уменьшается испарение.

Эти изменения иллюстрируются таблицей 1.

Таблица 1

Изменение физических свойств носовских почв после культуры клевера[2]

Место взятия проб и глубина в см		Некапиллярная скважность в %	В 100 г почвы содержится воздуха в %	Вода проходит[3] за сутки на глубину в см
Овес по майскому пару	5—15	4.4	15.7	9.6
	20—30	6.1	5	
Овес по клеверному пару	5—15	9.4	22.3	33.6
	20—30	7.2	14	

Некапиллярная скважность в почвах после майского пара в горизонте 5—15 составляет 4.4%, а в горизонте 20—30—6.1%; после клеверного пара в горизонте 5—15 она равна 9.4% и в горизонте 20—30—7.2%

[1] Беглое указание на такое влияние клевера на почву имеется также в работах Сумской и Шатиловской с.-х. оп. станций (10, стр. 10).

[2] Составлено по данным Носовской опытной станции.

[3] Опыты производились при помощи прибора Дояренко.

(10, стр. 15). В почвах после майского пара вода проходит за сутки на глубину 9.6 см; в почвах же после клеверного пара—на глубину 33.6 см. Что касается аэрации, то количество воздуха, содержащееся в 100 см^3 почвы после майского пара измеряется 15.7% для горизонта 5—15 и 5% для горизонта 20—30. После культуры клевера количество воздуха в 100 см^3 почвы возрастает до 22.3% для пахотного горизонта 5—15 и до 14% для подпахотного 20—30.

3. Благодаря усилению аэрации ускоряется минерализация азотсодержащих органических веществ (4, стр. 56).

4. Санитарные условия для жизни растений улучшаются (4, стр. 53), как следствие большей интенсивности окислительных процессов в почве. Повидимому, прекращается образование недоокисленных ядовитых продуктов распада органических веществ. Улучшение санитарного режима сказывается и на деятельности бактерий (см. ниже главы III и IV).

5. Подпахотный горизонт, который, как уже говорилось выше, в носовских почвах вследствие плохой аэрации отравляется различными вредными, недоокисленными соединениями, утрачивает эти особенности под влиянием культуры клевера (4, стр. 53). Свойства водных вытяжек, а также опыты в вегетационных сосудах с почвами различных горизонтов определенно подтверждают оба предположения. Выращивание овса в водных вытяжках из различных горизонтов указывает на особо неблагоприятное влияние на рост растений водных вытяжек из почвы подпахотного горизонта. Последнее в значительной мере понижается кипячением вытяжек, при котором, видимо, разрушаются вредные вещества (4, стр. 53).

Остановимся несколько подробнее на материалах, относящихся к этому пункту. Германов и Тарановская (10, стр. 30) указывают, что при разложении органического вещества в анаэробных условиях получаются ядовитые для растений, летучие соединения восстановленного характера, которые могут удаляться кипячением. Что же касается вегетационных опытов в сосудах (В. Г. Тарановская, 10, стр. 33), то они приводят нас к следующим выводам. В почвах, в севооборот которых не введен клевер, лишь верхний пахотный слой обнаруживает заметную урожайность (7.3 г на сосуд). Подпахотный горизонт (1 г на сосуд) резко отстает в этом смысле не только от пахотного горизонта, но дает меньшие урожаи даже по сравнению с нижними слоями почвы (1.8 г на сосуд). После клевера разница в урожайности пахотного и подпахотного слоев сильно сглаживается (8.2 г

и 4.2 г на сосуд). Увеличение же урожайности в процентах после клевера будет 12% для пахотного слоя, 55% для горизонта 50—70 и 320% для подпахотного слоя.

Следует отметить, что основная масса корневых остатков клевера сосредотачивается в пахотном слое, в котором наблюдается лишь слабое повышение урожайности после культуры клевера. Отсюда вытекает, что главное воздействие клевера на почву состоит не в увеличении запаса питательных веществ за счет его корневых остатков (10, стр. 35), но в специфическом воздействии корневой системы клевера на структуру почвы, а отсюда и на ее физические свойства, что приводит в конечном итоге к поднятию аэрации (4, стр. 55 и 10, стр. 37). Все вышеупомянутые свойства носовских почв и изменения их под действием клевера будут иметь значение для правильного понимания излагаемых в дальнейшем биохимических процессов. Приведем еще вкратце те объяснения, которые выдвигаются акад. Гедройцем относительно причин благоприятного воздействия клевера на носовские черноземы. К. К. Гедройц предполагает (4, стр. 64), что клевер может улучшать структуру почвы, спрессовывая пылеватые почвенные частицы в комочки внутри мелких ячей, образованных тонкими разветвлениями его мощной корневой системы. При отмирании и сгнивании корней на их месте остаются многочисленные ходы, которые увеличивают некапиллярную скважность почвы. Далее возможно, что выделения корней клевера особо обильны и притом обладают коагулирующими свойствами, а органические вещества, получающиеся при их разложении, способны цементировать мелкие почвенные частицы в аггрегаты. И, наконец, вследствие большой испаряющей способности во время своего роста, клевер может содействовать поднятию кальция в виде двууглекислой соли из нижних карбонатных горизонтов в верхние слои почвы. Это также должно вести к усиленной коагуляции почвенных частиц, уничтожая ненасыщенность почвы, которая, как известно, способствует распылению структурных элементов. Ультрамеханический анализ носовских почв (9, стр. 37 и 10, стр. 17) действительно обнаруживает, что после культуры клевера увеличивается число илистых частиц и уменьшается количество свободных коллоидальных. Это указывает на бо́льшую прочность микроструктурных элементов после культуры клевера и согласуется с вышеизложенными предположениями К. К. Гедройца.

Имеются еще указания, что клевер вносит в почву своими пожнивными остатками гораздо больше кальция, чем многие другие культурные растения.

Именно, на морген рожь дает 42 англ. ф.[1] кальция, пшеница — 44, ячмень — 24, люцерна — 112 и клевер — 150.[2] В заключение отметим, что из всех испытанных бобовых растений, при настоящих климатических условиях, лишь один клевер способен оказывать такое благоприятное действие на почвы носовского опытного поля. Опыты с викой и эспарцетом не дали таких результатов (4, стр. 63).

II. Задачи и методика исследования микробиологических свойств носовских черноземов

Общие замечания

Все то, что было сказано о генезисе и свойствах почв носовского опытного поля, заставляло с интересом отнестись к изучению микрофлоры почв этого типа, до сих пор мало исследованной, и вызывало предположение, что детальное исследование даст новый материал для подтверждения взгляда К. К. Гедройца о зависимости биохимических процессов от прошлого носовских почв, а также о влиянии культуры клевера на их протекание. Было очевидно, что биохимические процессы, их направление и интенсивность не будут одинаковы в носовских почвах до и после культуры клевера. Работы над изучением влияния культуры клевера на физические свойства носовских черноземов давали возможность проследить и сравнить, каким образом в почвах одинаковых по своему происхождению и химическим свойствам, но разнящихся между собой по физическим особенностям — как в этих почвах протекают биохимические процессы, и как изменение физических свойств почвы отражается на жизнедеятельности почвенных бактерий. В своих многочисленных работах о носовских почвах К. К. Гедройц отмечает подавленность процессов нитрификации и аммонификации в этих почвах и устанавливает связь между этой особенностью носовских черноземов и их былою солонцеватостью. В тех же трудах К. К. Гедройц указывает на усиление нитрификационной деятельности носовских почв под влиянием культуры клевера и высказывает предположение, что такое благоприятное действие клевера распространяется на все биохимические процессы, протекающие в интересующих нас почвах.

[1] Английский фунт равен 450.46 г. Морген составляет 0.255 га.

[2] Приведенные данные заимствованы из доклада Ф. Н. Германова на съезде опытных станций в Носовке в 1929 г.

Работы Ф. Н. Германова (12, 13) и одна совместная работа Ф. Н. Германова и В. Г. Тарановской (9, глава 7) явились дальнейшим развитием и подтверждением этого взгляда. Руководящим в работах Ф. Н. Германова было соображение, что черноземы Носовской опытной станции, пережившие стадию засоления, являются почвами малоактивными в смысле деятельности аэробных бактерий и что деятельность эта может стимулироваться введением клевера в севооборот.

Исследования были проведены качественными методами. Но для пахотного горизонта был также произведен подсчет числа бактерий по методу Виноградского, непосредственно в почве.

Главнейшие фактические данные приведенные в указанных работах состоят в следующем:

1. Общее число бактерий в почве видимо мало: в пахотном горизонте 5—15 их оказалось в среднем 450 миллионов в 1 г почвы, тогда как в почвах богато заселенных это число достигает нескольких миллиардов.

2. Процесс денитрификации протекает довольно энергично.

3. Азотобактер обнаружен не был.

4. *Clostridium Pasteurianum* развивается энергично.

5. Процессы нитрификации и аэробного разложения клетчатки после культуры клевера развиваются в почвах сильнее, чем до этого.

Что касается нитрификационной деятельности носовских почв, то об интенсивности ее судилось, главным образом, по количеству нитратов в почвенных образцах непосредственно после взятия их с поля. Следует отметить, что в этом смысле станция располагает богатым материалом, имея многолетние систематические наблюдения над изменениями количеств нитратного азота в полях майского и клеверного севооборотов. Но, кроме того, авторами производились также качественные наблюдения над развитием нитрифицирующих бактерий в жидкой среде и на кремневых пластинках по способу Виноградского.

Таким образом, можно считать, что вопрос о микробиологических особенностях носовских почв и о том влиянии, которое на них оказывает введение культуры клевера в севооборот, был совершенно ясно поставлен и получил свое первое освещение в вышеуказанных работах. Этим же авторам удалось на цифровом материале установить параллелизм между улучшением физических и химических свойств почв под влиянием культуры клевера, соответственными изменениями количеств нитратов и урожайностью почвы.

Нашей задачей было продолжить эти работы в смысле большей детализации наблюдений, распространив их на большее число физиологических групп бактерий, и дополнить чисто химические данные о ходе аммонификации и, по преимуществу, химические — о ходе нитрификации в носовских почвах, количественными наблюдениями над максимально возможной активностью аммонифицирующих и нитрифицирующих бактерий в этих почвах. Иными словами, эта часть задачи состояла в том, чтобы в опытной обстановке изучить потенциальную способность носовских почв к процессам нитрификации и аммонификации. В этом случае являлась возможность судить о работе названных физиологических групп бактерий не по полевым данным, колеблющимся в зависимости от метеорологических и иных условий, а по данным опытов, произведенных в неизменяющейся оптимальной обстановке для развития этих процессов.

Все эти материалы должны были группироваться вокруг центрального вопроса о параллельном влиянии культуры клевера на физические свойства, рост растений и урожайность почвы, с одной стороны, и на ее микробиологическую активность, с другой.

Образцы для исследования

Образцы почв для исследования были взяты с опытных делянок, в севооборот которых в одном случае был введен клевер — севооборот с клеверным паром, — в другом же севообороте клевер отсутствовал — севооборот с майским паром.[1] В дальнейшем, для краткости, севооборот с клеверным паром будет называться «клеверным севооборотом», а севооборот с майским паром — «майским севооборотом». Образцы были взяты в один день 25 VI.

Как в том, так и в другом случае с весны пар был засеян овсом, который поднимался на высоту приблизительно 7—9 см ко времени взятия проб.

С каждой опытной делянки образцы брались из 5 мест; вес средней пробы колебался около 2—2$^1/_2$ кг. Исследовались горизонты: пахотный

[1] При севообороте с майским паром последовательная смена культур будет такова: озимая рожь — овес — пар. В мае поле вспахивают и осенью засевают рожью. При севообороте с клеверным паром после ржи сеют овес, под который подсевают клевер. Клевер, как двухлетнее растение, достигает полного развития на следующее лето: в июне его косят, вспахивают землю и осенью снова пускают под рожь (озимая рожь — овес + клевер — клевер).

5—15, подпахотный 20—30 и горизонт 35—45. Качественные пробы на азотобактер, *Clostridium Pasteurianum*, нитрификацию, денитрификацию, разложение клетчатки аэробное и анаэробное и на маслянокислое брожение вообще, а также опыты для определения потенциальной способности этих почв к нитрификации, были поставлены тотчас по разработке образцов, принесенных с поля.

Опыты же количественного определения интенсивности процесса аммонификации, точно так же как подсчет колоний гнилостных бактерий, были проведены с образцами, доведенными до воздушно-сухого состояния.

Методика

Для качественного группового анализа применялись жидкие среды (способ Remy) и твердые среды, в том числе кремневые пластинки, пропитываемые соответствующими питательными средами (способ Виноградского). О подробном составе различных элективных сред см. «Практическое руководство по микробиологии» В. Л. Омелянского (15). Все производившиеся наблюдения проверялись микроскопическими исследованиями.

Количественные определения способности почв к нитрификации и аммонификации производились по способу Ваксмана непосредственно в почвах. Как в том, так и в другом случае брались навески почвы из расчета на 50 г сухой почвы. Затем почвы выдерживались в чашках Коха при увлажнении до 60% общей влагоёмкости в термостате при 25° C втечение 3-х недель. После этого производилось определение нитратов в водных вытяжках. Определения же аммиака делались втечение опыта три раза — через одну, две и три недели для получения кривой накопления аммиака в почве. Определения производились колориметрически.

Опыты для выявления нитрификационной способности почв ставились в трех вариантах. Одни чашки лишь увлажнялись водой, в другие вносилась лупиновая мука (0.3 г на 50 г сухой почвы), а в третьи сернокислый аммоний (0.07 г на 50 г сухой почвы). Это давало возможность выяснить, как реагирует данная почва на органическое и минеральное азотистое удобрение. При изучении процесса аммонификации в качестве удобрительного материала, само собой разумеется, бралась одна лупиновая мука. Аммиак извлекался из почвы однонормальным раствором хлористого калия. Промывание производилось декантацией. В первый раз приливалось по 50 куб. см хлористого калия. После энергичного взбалтывания жидкости

давали отстояться, а потом сливали ее на фильтр. Для последующего промывания хлористый калий брался порциями по 20—30 куб. см. Промывание производилось почти до полного исчезновения реакции на аммиак при помощи реактива Несслера (до следов). После отгонки аммиака из вытяжек путем кипячения в присутствии магнезии, аммиак, как уже говорилось выше, определялся колориметрически.

Условные обозначения интенсивности протекания биохимических процессов в почвах

+ + + +	(4 больших креста) — бурно.
+ + + +	(3 больших креста, 1 малый) — очень энергично.
+ + +	(3 больших креста) — энергично.
+ + +	(2 больших креста, 1 малый) — выше среднего.
+ +	(2 больших креста) — средне.
+ +	(1 большой крест, 1 малый) — ниже среднего.
+	(1 большой крест) — слабо.
+	(1 малый крест) — очень слабо.
—	(черта) — процесс не развился.

III. Качественное изучение биохимических процессов до и после введения клевера в севооборот носовских черноземов

Азотобактер

Для опыта брались жидкая и твердая маннитные среды (15, стр. 178) и пластинки кремнекислого геля, пропитанные соответствующей питательной средой.[1] Развития азотобактера не наблюдалось ни в одном случае, ни в одном горизонте, одинаково как почв для после майского, так и после клеверного пара. Азотобактер отсутствует в носовских почвах; улучшение аэрации под влиянием культуры клевера не вызывает его появления. Величина pH, колеблющаяся для различных горизонтов между 6.5 и 7.3, не может считаться фактором, ограничивающим развитие азотобактера. Причину его

[1] На чашку диаметром 12 см бралось:

10 куб. см среды состава: дест. воды 100 куб. см

K_2HPO_4	0.5 г
$MgSO_4$	0.3 »
$NaCl$	0.3 »
$FeSO_4$	0.01 »
$MnSO_4$	0.01 »

5 куб. см 20% раствора маннита.

5 » » взвеси с 0.5 г $CaCO_3$.

отсутствия следует, видимо, искать в данном случае не в недостаточной аэрации носовских черноземов и не в неподходящей реакции этих почв.

Ввиду большого интереса, который возбуждает этот вопрос, исследование в этой области продолжается и будет служить темой особого сообщения.

Clostridium Pasteurianum[1]

Clostridium Pasteurianum распространен во всех горизонтах носовских почв, как после майского, так и после клеверного пара. Брожение протекает энергично в обоих случаях. Начинается брожение на 3—4-й день после заражения. Пена в пробирках достигает высоты от 1/2 до 1 1/2 см, чаще всего поднимаясь на высоту 1 см. Наиболее интенсивно брожение идет в подпахотном горизонте и в горизонте 35—45. Пахотный горизонт 5—15 несколько отстает.

Нитрификация

Качественные пробы в жидкой среде были поставлены в колбах Виноградского (15, стр. 166).

Результаты сведены в нижеследующую таблицу.

Таблица 2

Развитие процесса нитрификации в жидкой среде Виноградского

Место взятия проб и глубина в см		Время заражения	Время появления HNO_3						Интенсивность процесса
			17 VII	27 VII	6 VIII	23 VIII	6 IX	12 X	
Овес по майскому пару	5—15	29 VI	—	+	+++	+++	+++	+++	++
	20—30	»	—	—	—	—	—	—	—
	35—45	»	—	—	—	Следы	+	+++	+
Овес по клеверному пару	5—15	»	Следы	++	+++	+++	+++	+++	++
	20—30	»	»	+	++	+++	+++	+++	+
	35—45	»	—	—	—	Следы	++	+++	+

[1] Наблюдения велись в жидкой среде (15, стр. 180) с пастеризацией и без таковой, с дополнительным заражением пробирок *Bac. fluorescens liquaefaciens*, для поглощения кислорода и создания анаэробных условий, или без такового.

Нитрификация протекает наиболее энергично, раньше начинаясь и раньше достигая своего максимального развития, в пахотном горизонте клеверного севооборота. В подпахотном слое процесс несколько замедляется и и в горизонте 35—45 развивается еще медленнее. Интенсивность нитрификации постепенно падает с глубиной. Почвы после майского пара сильно отстают от почв после клеверного пара в смысле своей нитрификационной деятельности. В пахотном слое развитие нитрификации наблюдается значительно позднее, чем в пахотном горизонте после клеверного пара. В горизонте 35—45 мы не замечаем никакого отличия от соответствующего горизонта клеверного севооборота, но зато наблюдается огромная разница в подпахотном горизонте 20—30. В почвах после майского пара в этом горизонте нитрификация не развивается вовсе. Таким образом, в то время как в почвах клеверного севооборота мы наблюдаем нормальную постепенную убыль нитрификации с глубиной, в почвах после майского пара замечается полное отсутствие нитрификации в подпахотном горизонте, после чего процесс снова выравнивается и идет в горизонте 35—45 с той же интенсивностью как в почвах после клеверного пара. Объяснение этого явления само собой понятно, если вспомнить, что в почвах с майским паром именно горизонт 20—30 отличается плохой аэрацией и возможным присутствием ядовитых недоокисленных соединений, и что свойства, именно этого горизонта особенно улучшаются под влиянием культуры клевера. Нитрифицирующие бактерии чувствительно реагируют на это улучшение.

Денитрификация

Наблюдения над процессом денитрификации велись в пробирках в жидкой среде Гилтая с последующим высевом на твердую среду и повторным заражением той же среды Гилтая (15, стр. 174).

Процесс в почвах протекает в общих чертах энергично как после майского, так и после клеверного пара, ослабевая в горизонте 35—45. Интересно снова отметить, что, в то время как в пахотном горизонте и в горизонте 35—45 мы не замечаем почти никакой разницы в интенсивности протекания денитрификации после майского и после клеверного пара, в горизонте 20—30 эта разница бросается в глаза. В почвах после клеверного пара денитрификация, как этого и следовало ожидать для анаэробного процесса, достигает своего максимума в подпахотном горизонте, который хуже аэрируется по сравнению с пахотным слоем, но содержит больше питательных веществ,

Таблица 3

Развитие процесса денитрификации в жидкой среде Гилтая

Место взятия проб и глубина в см		Начало процесса — время появления HNO_2	Окончание процесса — время исчезновения HNO_3	Выделение газа — высота пены в пробирках в см	На который день процесс достиг максимума	Интенсивность процесса
Овес по майскому пару	5—15	Следующий день после заражения	5—6-й день	$1^1/_2$ см	3—5-й день	+++
	20—30	»	»	Пенистое кольцо высотою $^1/_3$—$^3/_4$ см	4—5-й день, иногда не выражен	++
	35—45	»	6-й день	1 см	5—6-й день	++
Овес по клеверному пару	5—15	»	4—5-й день	$1^1/_2$ см	4-й день	+++
	20—30	»	4-й день	2 см	3—4-й день	++++
	35—45	»	6—7-й день	Пенистое кольцо, иногда пена $^1/_2$ см	6-й день, иногда не выражен	++

чем горизонт 35—45. В почвах же после майского пара денитрификация наиболее слаба, именно в этом горизонте, даже несколько усиливаясь в глубжележащем горизонте 35—45. Вероятно, здесь снова имеет место влияние ядовитых веществ, накапливающихся, повидимому, в подпахотном горизонте почв майского севооборота.

Аэробное разложение клетчатки

Данные, касающиеся аэробного разложения клетчатки, сведены в нижеследующую таблицу (табл. 4, стр. 1236).

Можно отметить, что процесс разложения клетчатки,[1] вызываемый аэробными бактериями, развивается в носовских почвах лишь после культуры клевера, улучшающего аэрацию почвы по сравнению с почвами после майского пара, где, видимо, проветривание почвы недостаточно для развития этих бактериальных форм.

[1] Состав среды см. 15, стр. 201.

Таблица 4

Аэробное разложение клетчатки

Место взятия проб и глубина в см		На который день обозначилась зона разложения клетчатки	Макроскопический вид зоны	Микроскопическое исследование зоны разрушения	Интенсивность процесса
Овес по майскому пару	5—15	Процесс не развился			—
	20—30				—
	35—45				—
Овес по клеверному пару	5—15	На 3-й день	Слизистая, резкая, ярко желтая полоса	Бактериальные формы из группы *Cytophaga*, коккобактерии, кокки, споры	+++
	20—30	На 7-й день	Слизистая, тусклая, желтая полоса	»	++
	35—45	Процесс не развился			—

Анаэробное разложение клетчатки[1]

Процесс развился лишь в пахотном горизонте почв клеверного севооборота.. Причина такого исключительного развития процесса в этом горизонте остается неясной.

Маслянокислое брожение

Брожение протекает приблизительно с одинаковой интенсивностью в почвах, как после майского, так и после клеверного пара. Обращает на себя внимание тот факт, что, в то время как в почвах после культуры клевера процесс маслянокислого брожения постепенно затухает с глубиной, в почвах после майского пара горизонт 20—30 выделяется наиболее энергичным развитием брожения. Это противоречит наблюдению, что большинство биохимических процессов, в том числе и процесс денитрификации, точно так же анаэробный, как и маслянокислое брожение, наоборот, заметно падает в этом слое по сравнению с выше и нижележащими горизонтами.

[1] Описание постановки опыта см. 15, стр. 202.

Таблица 5

Развитие маслянокислого брожения[1]

Место взятия проб и глубина в см		На который день после заражения началось брожение		Выделение газа, высота пены в пробирках в см		На который день после заражения брожение достигает максимума		Интенсивность процесса	
		С паст.	Без паст.	С паст.	Без паст.	С паст.	Без паст.	С паст.	Без паст.
Овес по майскому пару	5—15	На след. или 2-й день	На след. день	2 см	$1^1/_2$ см	На 2-й день	На 2-й день	+++	+++
	20—30	На 2-й день	На 2-й день	3 см	$2—2^1/_2$ см	»	»	++++	+++ +
	35—45	»	»	$^1/_2$—1 см в половине пробирки	$^3/_4$ см	Неясно выражен, иногда на 3-й день	На 6-й день	+ +	+ +
Овес по клеверному пару	5—15	На след. день	На след. день	2 см	$2—2^1/_2$ см	На 2-й день	На 2-й день	+++	+++ +
	20—30	На 2-й день	На 2-й день	1 см	$1^1/_2$ см	На 3—4-й день	На 4-й день	++	++ +
	35—45	На 2—3-й день	»	$^1/_3$—$^1/_2$ см в $^1/_3$ пробирки	1—2 см	На 4-й день, выражен слабо	На 5-й день	+	++

Таблица 6

Развитие маслянокислого брожения (повторный опыт)

Место взятия проб и глубина в см		На который день после заражения началось брожение		Выделение газа, высота пены в пробирках в см		На который день после заражения брожение достигло максимума		Интенсивность процесса	
		С паст.	Без паст.	С паст.	Без паст.	С паст.	Без паст.	С паст.	Без паст.
Почва после майского пара	5—15	На след. день	На след. день	$1^1/_2$—2 см	$1—1^1/_4$ см	На след. день	На след. день	++++	+++
	20—30	На 2—3-й день	На 2—3-й день	Пена с одной стороны пробирки $^1/_2$ см	Пенистое скопление $^1/_2$ см	На 3-й день	На 3-й день	+	+

[1] Процесс наблюдался в пробирках, наполненных мясо-пептонным бульоном с прибавлением 2% глюкозы. Газ собирался в легкие стеклянные колпачки, опускавшиеся в пробирки. Опыты ставились с пастеризацией пробирок после заражения их почвой и без таковой,

Опыт был повторен с другим образцом почвы, также после майского пара, но взятым с другой опытной делянки. Результаты оказались противоположными только что изложенным и исследование обнаружило сильное ослабление процесса маслянокислого брожения в горизонте 20—30.

Это заставляет нас склониться к мнению, что усиление маслянокислого брожения в горизонте 20—30 после майского пара в первом опыте можно объяснить скорее вниманием каких-либо случайных факторов, которые не смогли быть учтены нами. Повидимому этот процесс, подобно всем остальным исследованным нами биохимическим процессам, также сильно ослабевает в подпахотном горизонте почв майского севооборота.

Разложение белкового вещества в аэробных условиях

Об относительном количестве бактерий, разлагающих белки в аэробных условиях, судилось по числу колоний, разжижающих желатину, которые вырастали в чашках Петри при заражении желатины исследуемыми почвами. К навеске почвы в 0.5 г приливалось 10 куб. см стерильной воды. Полученную взвесь встряхивали в течение 3 мин. и давали отстояться 30 сек.

Таблица 7

Бактерии разлагающие белки в аэробных условиях

Место взятия проб и глубина в см		Число колоний		Интенсивность процесса
		При внесении 1 петли суспенсии	При внесении 2 петель суспенсии	
Овес по майскому пару	5—15	14	27	++
	20—30	1	3	Едва развился
	35—45	—	1	1 колония
Овес по клеверному пару	5—15	55	80	+++
	20—30	7	13	+
	35—45	2	—	2 колонии

После этого пробирки с желатиной заражались одной и двумя петлями суспенсии. Помещенная выше таблица 7 характеризует наши почвы в указанном направлении.

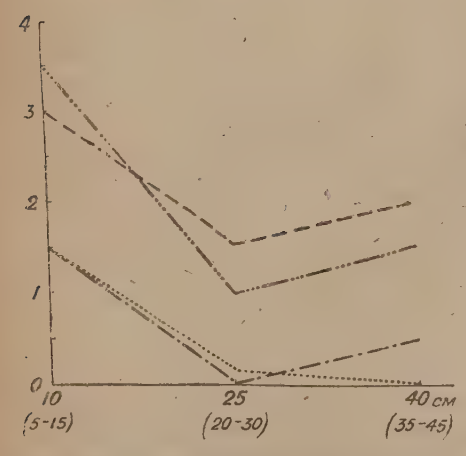
Рассмотрение этой таблицы с редкой наглядностью показывает, насколько энергичнее идет аэробное разложение белкового вещества в почвах после клеверного пара, когда под влиянием культуры клевера значительно улучшилось проветривание почвы.

Вместе с тем мы видим, что этот процесс сосредоточивается почти исключительно в наилучше аэрируемых пахотных горизонтах, резко падая в подпахотных и сводясь почти на нет в горизонтах 35—45.

Сравнивая число колоний бактерий, выросших на желатине при заражении ее почвой подпахотного горизонта после клеверного пара с таковым же после майского пара, мы снова отмечаем постоянное свойство подпахотного горизонта майского севооборота: развитие биохимических процессов в нем всегда подавлено по сравнению с подпахотным горизонтом после клеверного пара.

Сводка результатов качественного исследования

Подводя итоги качественного исследования биохимических процессов в носовских черноземах до и после введения клевера в севооборот, мы



По горизонтальной оси отложены средние глубины исследованных горизонтов в см, по вертикальной — интенсивность протекания процессов, причем (совершенно условно) одному большому кресту соответствует одно деление малому — половина деления. Все биохимические процессы, кроме процесса аэробного разложения белков, проходят в подпахатном горизонте 20—30 через ясно выраженный минимум.

—.—.— нитрификация
— — — денитрификация
—...—... маслянокислое брожение
.... аэробное разложение белков

Фиг. 1. Интенсивность биохимических процессов в носовских черноземах до введения клевера в севооборот (качественное исследование).

позволим себе для большей наглядности и для большего удобства сравнения результатов свести их в одну общую таблицу (табл. 8, стр. 1240).

Те же данные еще рельефнее выступают на диаграммах (фиг. 1 и 2).

Развитие биохимических процессов в носовски

Место взятия проб и глубина в см		Азотобактер	*Clostridium Pasteurianum*	Нитрификация	Денитрификация
Овес по майскому пару	5—15	—	+ + +	+ +	+ + +
	20—30	—	+ + + +	—	+ +
	35—45	—	+ + + +	+	+ +
Овес по клеверному пару	5—15	—	+ + +	+ +	+ + +
	20—30	—	+ + + +	+	+ + + -
	35—45	—	+ + +	+	+ +

IV. Количественное изучение биохимических процессов до и после введения клевера в севооборот носовских черноземов

Потенциальная способность почв к нитрификации

Те соотношения, которые выяснились у нас при качественном изучении биохимических процессов в носовских черноземах, выступают с несравненно большей рельефностью при количественном исследовании тех же явлений. Мы переходим теперь к изложению результатов, полученных нами при количественном изучении потенциальной способности этих почв к нитрификакации. Весь цифровой материал собран в нижепомещенную таблицу (табл. 9, стр. 1242).

При рассмотрении этой таблицы обращает на себя внимание практически почти полное отсутствие нитратов в носовских почвах, как после майского, так и после клеверного пара, к моменту взятия образцов в конце июня.

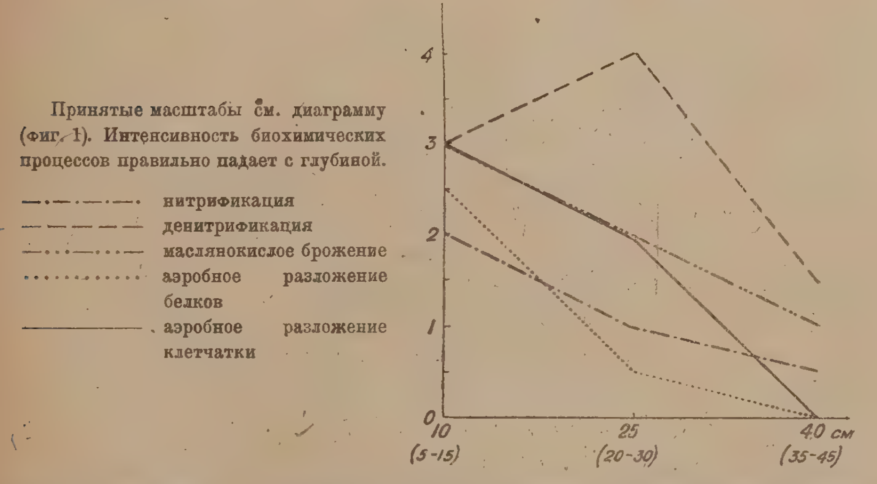
Бедность носовских почв нитратами была уже установлена многолетними работами Носовской станции. Исследования по этому вопросу Тарановской и Германова (9) указывают на низкую энергию нитрификации в этих почвах. Авторы приводят в своей работе цифры, показывающие, что черноземы Харьковской опытной станции содержат нитратов значительно больше, чем носовские почвы (10, стр. 19). Такое различие в нитрификационной деятельности указанных почв зависит по мнению авторов не от недостатка

Таблица 8

...рноземах до и после введения клевера в севооборот

...эробное ...ложение ...етчатки	Анаэробное разложение клетчатки	Маслянокислое брожение		Маслянокислое брожение (повторный опыт)		Бактериальное разложение белков в аэробных условиях
		С паст.	Без паст.	С паст.	Без паст.	
—	—	+++	+++	++++	+++	++
—	—	++++	++++	+	+	Едва развилось
—	—	++	++	не иссл.	не иссл.	1 колония
++	+	+++	++++	»	»	+++
++	—	++	+++	»	»	+
—	—	+	++	»	»	2 колонии

в количестве нитрификационного материала в почвах носовского опытного поля,[1] а объясняется его качеством. К. К. Гедройц (5) считает, что в про-



Фиг. 2. Интенсивность биохимических процессов в носовских черноземах после введения клевера в севооборот (качественное исследование).

цессе рассолонцевания носовские почвы были обеднены наиболее подвижным органическим веществом и в настоящее время содержат азотистые

[1] Общего азота в носовских почвах в среднем содержится 0.24%. В почвах же Харьковской опытной станции 0.22%, т. е. даже несколько меньше (10, стр. 19).

Количество нитратного азот

Место взятия проб и глубина в см		Время взятия проб	Время постановки опытов	Контроль			
				Влажность в момент взятия проб	Влагоёмкость на сухую почву	pH электрометр	Азот NO_3
Овес по майскому пару	5—15	25 VI	27 VI	10.18	33.65	6.55	0.09
	20—30	»	»	13.64	36.69	6.83	0.05
	35—45	»	»	14.71	36.63	7.33	0.05
Овес по клеверному пару	5—15	»	»	9.67	35.44	6.91	0.10
	20—30	»	»	12 23	35.91	6.99	0.06
	35—45	»	»	14.08	36.44	7.09	0.06

соединения в менее доступной для микроорганизмов форме, чем другие почвы. Кроме того, вследствие бесструктурности и плохих физических свойств, эти почвы отличаются большой неустойчивостью процессов нитрификации. Так, в них наблюдается почти полное отсутствие нитратов весной и быстрое уменьшение их осенью и летом после обильных дождей: избыточное увлажнение при отсутствии почвенной структуры ведет к сильному понижению аэрации и к созданию условий, подавляющих деятельность нитрифицирующих бактерий. Образцы, исследовавшиеся нами, видимо, как раз были взяты в один из таких неблагоприятных для протекания нитрификации периодов.

Тем более было интересно проследить работу нитрифицирующих бактерий в оптимальных условиях лабораторного опыта. Результаты получились следующие. После того как почва выдерживалась в термостате втечение 3-х недель в увлажненном состоянии (60% общей влагоёмкости), без внесения удобрений, прибыль нитратного азота в пахотном слое почв майского севооборота была 0.30 мг на 50 г сухой почвы и 0.62 мг в соответствующем горизонте клеверного севооборота, т. е. почти ровно вдвое больше, чем в почвах после майского пара. Эти цифры наглядно указывали на благо-

[1] Определялось колориметрически по шкале Лабса и Кларка.

Таблица 9

мг на 50 г сухой почвы

Опыт								
Вода			Лупиновая мука			$(NH_4)_2SO_4$		
pH[1]	Азот NO_3	Прибыль азота NO_3	pH[1]	Азот NO_3	Прибыль азота NO_3	pH[1]	Азот NO_3	Прибыль азота NO_3
6.9	0.39	0.30	6.5	3.89	3.80	6.2	2.61	2.52
7.2	0.11	0.06	7.4	0.70	0.65	6.8	0.46	0.42
7.6	0.11	0.06	7.6	0.93	0.88	7.4	1.01	0.96
6.7	0.72	0.62	6.5	4.68	4.58	6.4	3.14	3.04
7.1	0.21	0.15	7.3	1.21	1.15	6.6	0.86	0.80
7.3	0.13	0.06	7.4	1.12	1.05	6.8	0.37	0.31

приятное действие культуры клевера на нитрификационные процессы в исследуемых почвах, но вместе с тем они же свидетельствовали о невысокой нитрификационной деятельности носовских почв вообще, даже после того как аэрация почвы была улучшена введением клевера в севооборот. Из данных исследования нитрификационной способности различных полевых почв сотрудниками Микробиологического института Ленинской академии в Ленинграде вытекает, что наши полевые почвы способны накоплять в среднем от 0.3 до 1.3 мг нитратного азота на 50 г сухой почвы. Таким образом, даже цифра 0.62, характеризующая пахотный слой почв клеверного севооборота, не может считаться особо высокой.

Что касается горизонтов 20—30 и 35—45, то в них нитрификация резко падает по сравнению с пахотным слоем, как этого и нужно было ожидать.

Качественное изучение микробиологических свойств подпахотного горизонта 20—30 носовских черноземов, до введения клевера в севооборот этих почв, показало, что все биохимические процессы подавлены в этом слое по сравнению с другими горизонтами. Цифры вполне подтверждают это заключение по отношению к процессу нитрификации. В почвах клеверного севооборота ослабление нитрификации происходит нормально и прибыль

нитратного азота в горизонте 20—30 почти ровно вдвое больше, чем в горизонте 35—45. В почвах же после майского пара наконление азота нитратов одинаково в обоих указанных слоях почвы. При правильном протекании нитрификации горизонт 20—30 майского севооборота должен был бы быть богаче нитратами, чем ниже лежащий, хуже аэрируемый и содержащий меньше питательных веществ горизонт 35—45, а, следовательно, в горизонте 20—30 образование нитратов задерживается по сравненю с горизонтом 35—45.[1]

Напомним, что в жидкой среде Виноградского при заражении ее почвой именно этого горизонта нитрификация не развилась вовсе (см. стр. 1234).

Но особенно резко выявляются характерно-неблагоприятные свойства подпахотного горизонта носовских почв до введения клевера в севооборот в опытах, поставленных с внесением в почву удобрений. В случае внесения как лупиновой муки, так и сернокислого аммония, количество вырабатываемых бактериями нитратов в более глубоко лежащем горизонте 35—45 значительно больше, чем в горизонте 20—30. Таким образом, в то время как в почвах после клеверного пара деятельность нитрифицирующих бактерий нормально постепенно слабеет с глубиной, в почвах после майского пара образование нитратов идет более интенсивно в глубже лежащем горизонте 35—45, чем в горизонте 20—30. Наблюдается искажение нормального хода нитрификации. Клевер, уничтожая вредные свойства подпахотного горизонта, восстанавливает естественное, правильное протекание этого процесса.

Мы уже неоднократно ссылались на мнение акад. К. К. Гедройца, что одна из причин слабой нитрификационнй деятельности носовских черноземов заключается в недостатке легко подвижного азотсодержащего вещества, вымытого при процессе рассолонцевания из этих почв (4, стр. 55). Лабораторные опыты со внесением различных удобрений, как нам кажется, подтверждают такое предположение акад. К. К. Гедройца относительно носовских почв. Внося то или иное вещество в почву, мы можем наблюдать как это отзывается на работе микроорганизмов и отсюда заключать, в каких именно веществах бактерии наиболее нуждаются для развития своей деятельности. В носовских черноземах процесс нитрификации сильнее всего повышается при внесении в почву легко разлагающейся лупиновой муки.

[1] См. свойства подпахотного горизонта носовских почв, стр. 1224.

Таким образом, после неблагоприятного влияния воздушного и водного режима, в первом минимуме здесь оказывается потребность этих почв в легко утилизируемых азотсодержащих органических веществах. Внесение сернокислого аммония точно также значительно увеличивает нитрификационную деятельность носовских черноземов, но в меньшей степени чем внесение лупиновой муки. Работа аммонификаторов в носовских почвах, видимо, достаточно энергична для того, чтобы перерабатывать азотистые органические вещества, если они попадают в почву в виде легко разложимых соединений, и для усиления процесса нитрификации не обязательно внесение минеральных азотистых удобрений в почву.

Сравнивая интенсивность процесса нитрификации в почвах после майского и после клеверного пара, при условии внесения в почвы удобрений, можно сказать, что носовские черноземы после клеверного пара отзываются гораздо сильнее на внесение как лупиновой муки, так и сернокислого аммония, чем почвы после майского пара (исключение составляет лишь один случай).

Однако, следует отметить, что если энергия нитрификации носовских почв и повышается чрезвычайно сильно при внесении в почву азотистых удобрений в той или иной форме, то все же и эти цифры нельзя считать высокими. Почвы, характеризующиеся интенсивной нитрификационной деятельностью, нередко могут давать в этих случаях в условиях лабораторного опыта до 13—15—16 мг прибыли азота на 50 г сухой почвы. Видимо все же, или нитрифицирующие бактерии малочисленны в носовских почвах и не отличаются большой активностью, или же свойства почв таковы, что даже создание в них оптимальных условий не может вызвать такой энергичной работы нитрификаторов как в других почвах.

На основании всего сказанного, мы можем сделать следующие выводы:

1. Потенциальная способность носовских почв к нитрификации слаба. Этот факт находится в полном соответствии с данными Ф. Н. Германова и В. Г. Тарановской. Причина низкой нитрификационной деятельности носовских черноземов была уже ранее указана К. К. Гедройцем в плохих физических свойствах этих почв, и в бедности их легко подвижным азотсодержащим органическим веществом. И то и другое К. К. Гедройц объяснил былою солонцеватостью этих почв.

2. Введение культуры клевера в севооборот, улучшая физические свойства носовских почв вообще, и увеличивая их аэрацию в част-

ности, значительно усиливает потенциальную способность почв к нитрификации.

3. Внесение в почвы удобрений в виде лупиновой муки или сернокислого аммония сильно повышает нитрификацию, увеличивая количество легко доступного нитрификационного материала.

4. Благоприятное действие лупиновой муки на интенсивность процесса нитрификации сильнее действия сернокислого аммония.

5. Почвы, в севооборот которых введен клевер, сильнее отзываются на внесение удобрений, чем почвы после майского пара, в смысле усиления потенциальной способности их к нитрификации.

6. В почвах после введения клевера в севооборот нитрификация постепенно падает с глубиной и нитрификация в горизонте 35—45 всегда слабее, чем в горизонте 20—30.

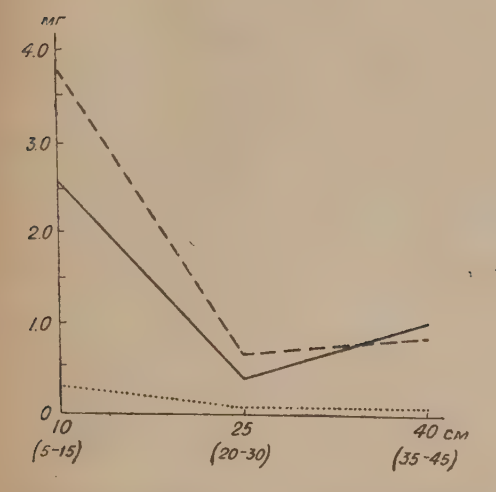
7. В почвах же до введения клевера в севооборот наблюдается обратное: нитрификация в более глубоком горизонте 35—45 протекает интенсивнее, чем в горизонте 20—30. В горизонте 20—30 нитрификация, видимо, угнетается действием недоокисленных продуктов распада органических веществ, накопляющихся в этом горизонте вследствие его недостаточной аэрации.[1]

8. Введение культуры клевера в севооборот, повышая аэрацию, уничтожает неблагоприятные особенности горизонта 20—30 и усиливает в нем деятельность нитрифицирующих бактерий. При этих условиях восстанавливается нормальное течение процесса нитрификации, которая постепенно и плавно ослабевает с глубиной.

9. Все указанные характерные черты процесса нитрификации (потенциальной способности почв к нитрификации) протекают в полном согласии с агрохимическими особенностями носовских почв, установленными работами Носовской опытной станции (см. выше в главе о физических и химических свойствах этих почв, стр. 1221).

Диаграммы (фиг. 3 и 4) иллюстрируют все сделанные нами выводы.

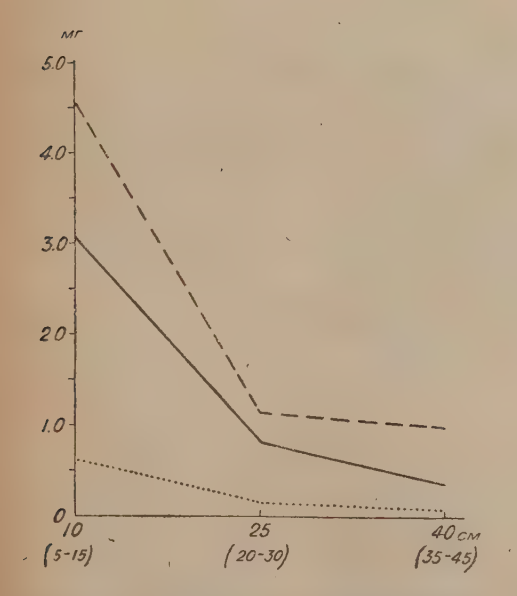
[1] Мы принуждены пока ограничиться указанием полного параллелизма между агрохимическими и микробиологическими особенностями подпахотного горизонта. Среди причин, отмеченных К. К. Гедройцем и могущих влиять на низкие качества этого горизонта, в настоящий момент было бы затруднительно указать ту, которая в данном случае является наиболее определяющей. Ближайшее исследование в этом направлении является весьма необходимым дополнением настоящей работы.



По горизонтельной оси отложены средние глубины исследованных горизонтов в см, по вертикальной — соответствующая прибыль образующегося нитратного азота в мг на 50 г сухой почвы. Процесс нитрификации проходит в подпахатном горизонте 20—30 через ясно выраженный минимум.

.... вода
— — — — лупиновая мука
———— сернокислый аммоний

Фиг. 3. Нитрификация в носовских черноземах до введения клевера в севооборот (количественное исследование).



Принятые масштабы см. диаграмму (фиг. 3). Нитрификация постепенно ослабевает с глубиной.

.... вода
— — — — лупиновая мука
———— сернокислый аммоний

Фиг. 4. Нитрификация в носовских черноземах после введения клевера в севооборот (количественное исследование

Количество аммиака в м

Место взятия проб и глубина в см		Время взятия проб	Время постановки опыта	Конт		
				Гигроскопическая влага	Влагоемкость на сухую почву	pH (электро метр.)
Овес по майскому пару	5—15	25 VI	13 VIII	2.67	33.65	6.55
	20—30	»	»	2.94	36.69	6.83
	35—45	»	»	2.88	36.63	7.33
Овес по клеверному пару	5—15	»	»	2.77	35.44	6.91
	20—30	»	»	2.81	35.91	6.99
	35—45	»	»	2.73	36.44	7.09

Аммонифицирующая способность почв

Химические анализы носовских черноземов указывают на присутствие лишь очень небольших количеств аммиака в этих почвах (7, стр. 13, 9, стр. 10, и 11, стр. 42). Интересно было выяснить, является ли эта особенность почв Носовской опытной станции следствием слабой деятельности аммонифицирующих микроорганизмов в почве, или же она обусловлена недостаточным количеством азотсодержащего органического вещества доступного микробам для разложения (7, стр. 14).

Рассмотрение цифрового материала, собранного в выше помещенной таблице (табл. 10) приводит нас к следующим заключениям, в одинаковой степени относящимся к почвам как до, так и после введения клевера в севооборот.

1. Количества аммиака в почвах до опыта ничтожны.

2. Аммонификация в опытах, поставленных без внесения лупиновой муки, идет очень слабо. Практически в горизонте 5—15 аммиак отсутствует. В горизонтах же 20—30 и 35—45 аммиака накопляется несколько больше, но все же эти количества мало отличаются от количеств аммиака до опыта.

Таблица 10

50 г сухой почвы

л ь		Опыт					
H_3 (одна почва)	NH_3 (почва + лупиновая мука)	NH_3 через 7 дней		NH_3 через 14 дней		NH_3 через 21 день	
		Вода	Лупиновая мука	Вода	Лупиновая мука	Вода	Лупиновая мука
0.54	0.48	0.10	7.73	0.04	7.21	0.05	5.79
0.36	0.39	0.64	6.18	0.32	6.97	0.55	9.26
0.36	не определ.	0.55	6.46	0.28	6.80	0.35	7.40
0.49	»	0.10	7.11	0.05	5.97	0.06	4.99
0.39	»	0.76	6.75	0.45	6.72	0.31	7.41
0.41	»	0.59	5.76	0.25	7.05	0.50	6.38

3. Внесение лупиновой муки резко повышает аммонификацию во всех горизонтах. При внесении лупиновой муки количество аммиака в горизонте 5—15 обоих севооборотов резко увеличивалось в первую неделю, но затем по мере развития нитрификации падало, причем в почвах после майского пара падение шло постепенно, тогда как в почвах после клеверного пара, видимо, в связи с более интенсивной и быстрее развивающейся здесь нитрификацией, это падение резко обнаруживалось уже на второй неделе. Наименьшие количества аммиака наблюдались в конце третьей недели. В горизонтах 20—30 и 35—45, вероятно, в связи с их слабой нитрификационной деятельностью, наоборот, накопление аммиака, начинаясь с первой недели, достигало своего максимума в конце третьей недели. Небольшое отступление в этом смысле замечалось лишь в нижнем горизонте почв клеверного севооборота.

Можно отметить наибольшее накопление аммиака по сравнению с другими горизонтами в подпахотном слое почв после майского пара к концу третьей недели. Возможное объяснение этого явления заключается в том, что, как показали опыты с нитрификацией, этот горизонт отличается наименьшей нитрификационной деятельностью, и, следовательно, скопляющийся здесь аммиак в меньшей степени перерабатывается микроорганизмами в азотную кислоту, чем в других почвенных слоях.

Сравнивая же энергию аммонификации в почвах до и после введения клевера в севооборот мы приходим к заключению, что этот процесс начинает протекать с большей интенсивностью после культуры клевера. Правда, цифры накопления аммиака в почвах клеверного севооборота в большинстве случаев несколько меньше таковых после майского пара и не часто превосходят их, но, принимая во внимание значительно более энергичную нитрификационную деятельность почв после культуры клевера, мы можем констатировать, что аммонификация в почвах клеверного севооборота идет более интенсивно чем после майского пара. Это вполне согласуется с нашими наблюдениями над числом вырастающих на желатине колоний гнилостных бактерий, возбудителей разложения белковых азотсодержащих веществ (см. табл. 7, стр. 1238). Таким образом, все приведенные выше данные заставляют нас высказать предположение, что аммонифицирующая деятельность носовских черноземов ограничивается теми же факторами, как и работа нитрифицирующих бактерий — именно плохой, аэрацией почв и недостатком легкодоступных для разложения азотсодержащих органических веществ. Обе причины тесно связаны с прошлой историей носовских черноземов и являются напоминанием о былой солонцеватости этих почв.

Заключение

Результаты нашего исследования могут быть резюмированы следующим образом:

1. Исследования К. К. Гедройца показали, что прошлое носовских черноземов, бывших когда то засоленными и потом рассолонцевавшихся, определяет их современные агрохимические свойства.

Втечение этих процессов они лишились наиболее ценного для питания растений и бактерий органического вещества и утеряли структурность, что является основной причиной их низких культурных качеств в настоящее время.

Осолодение — эта старческая фаза в эволюции почв, некогда бывших засоленными или солонцеватыми, — сопровождается затуханием организованной жизни в почве. Это резко отмечается, как в первых данных Ф. Н. Германова и В. Г. Тарановской, так и в наших исследованиях, — и в смысле обеднения группового состава бактерий, и в понижении интенсивности биохимических процессов.

Микробиологическая деятельность носовских почв слаба. Прошлое до сих пор еще тяготеет не только над агрохимическими свойствами, но и над биодинамикой этих почв.

2. В числе интересных особенностей носовских черноземов отмечаются свойства подпахотного горизонта, который отличается особо низкими культурными свойствами (повидимому, вследствие скопляющихся в нем вредных недоокислевных соединений), причем эти качества несколько восстанавливаются в нижележащих горизонтах. Эта особенность носовских черноземов, установленная работами Носовской опытной станции, находит полное соответствие в том различии, с которым протекают в разных горизонтах биохимические процессы, также проходящие в подпахотном горизонте через ясно выраженный минимум.

3. Введение клевера в севооборот носовских черноземов повышает культурные качества этих почв, особенно подпахотного горизонта. После культуры клевера подпахотный слой утрачивает свои характерно-неблагоприятные свойства. Соответственно с этим наши исследования обнаружили восстановление нормального протекания биохимических процессов, интенсивность которых теперь правильно и плавно падает с глубиной.

4. Сравнение данных агрохимии и полеводства (исследование урожайности отдельных горизонтов, см. стр. 1226—1227) с нашими данными микробиологических исследований позволяет отметить параллелизм между физическими свойствами, ростом растений и микробиологической активностью почвы, с одной стороны, и ее урожайностью, с другой.

Мы видим, что в исследованных почвах как растения, так и бактерии реагируют совершенно одинаково на изменение жизненных условий в последних.

И после культуры клевера, параллельно улучшению физических свойств почвы, повышается ее микробиологическая активность, усиливается рост растений и поднимается производительность почвы.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую благодарность акад. К. К. Гедройцу, предложившему мне тему настоящего исследования и неизменно проявлявшему к последнему живейший интерес. В равной мере я обязана благодарностью руководящему персоналу Носовской опытной станции, в частности Ф. Н. Германову, за любезное содействие, ценные указания и советы во всей моей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Акад. К. К. Гедройц. Почвенный поглощающий комплекс и почвенные поглощенные катионы, как основа генетической почвенной классификации. Изд. Носовской с.-х. опытной станции, вып. 47, 1927.
2. —— Осолодение почв. То же издание, вып. 44, 1926.
3. —— Солонцы, их происхождение, свойства и мелиорация. То же издание, вып. 46, 1928.
4. —— Почва как культурная среда для сельско-хозяйственных растений. Почвенные коллоиды и солонцеватость почв. То же издание, вып. 42, 1926.
5. —— Подвижность почвенных соединений и влияние на нее кальция. То же издание, вып. 43, 1926.
6. —— К вопросу об естественно-историческом районе Носовской с. х. Опытной Станции. То же издание, вып. 40, 1926.
7. —— Общий обзор результатов работ Химич. отд. Носовской Сел.-Хоз. оп. станции в связи с вопросом о генезисе и свойствах черноземов станции. То же издание, вып. 36, 1924.
8. —— Аналитические материалы по выяснению генезиса и свойств почв района Носовской Сел.-Хоз. оп. станции. То же издание, вып. 36, 1924.
9. В. Г. Тарановская и Ф. Н. Германов. Нитрификация в почве опытного поля Носовской сельско-хозяйств. опытн. станции и роль клевера в улучшении ее. То же издание, вып. 45, 1927.
10. Ф. Н. Германов и В. Г. Тарановская. Краткий отчет агрохимического отдела за 1924 год. То же издание, вып. 41, 1926.
11. —— Работы лаборатории Агро-Химического отд. Носовской Сел.-Хоз. оп. станции в 1922—1923 году. То же издание, вып. 36, 1924.
12. Ф. Н. Германов. Основное направление в изучении микробиологических свойств чернозема Носовской сел.-хоз. опытн. станции. То же издание, вып. 79, 1927.
13. —— Населенность бактериями и азотфиксирующая способность солонцов сравнительно с другими почвами лесостепи Украины. Труды Всесоюзн. центр. научно-исслед. инст. сахарн. промышл., вып. 2, 1929.
14. С. С. Соболев. К происхождению солонцово-болотного комплекса южной Черниговщины. Журн. Почвоведение, № 1—2 1929.
15. В. Л. Омелянский. Практическое руководство по микробиологии. 1922, Петроград.

N. SUSHKINA. CHANGES IN SOIL BIOCHEMICAL PROCESSES UNDER THE INFLUENCE OF CLOVER CULTURE

SUMMARY

The principal results of the present investigation may be stated as follows.

1. According to Prof. Gedroiz's investigations, the past life-history of the chernozems of the region of the Nosovka Agricultural Experiment Station is the determining factor of the actual agrochemical properties of these soils which once were salinised and subsequently underwent the processes of desalinisation. In the course of the development of these processes the soils were deprived of the most important nutritive organic matter necessary for the life of both plants and bacteria, and have lost their structure; this is the chief reason why at present they possess a low yielding capacity.

Solodisation, which represents the last phase in the evolution of soils that were formerly either salinised, or solonetsous, is usually accompanied by a gradual extinction of organic life in the soil. In our investigations, and in the first data of F. Germanov and V. Taranovskaja as well, this has been strikingly shown by the impoverishment of the bacterial group composition as well as by the lowered intensity of biochemical processes.

The microbiological activity in the soils of the Nosovka region is very low. The past life-history of these chernozems still influences not only the agrochemical properties, but also the biodynamics of these soils.

2. Among other peculiarities of the Nosovka chernozems of special interest belongs to the horizon underlying the arable horizon, which has an exceedingly low yielding capacity apparently due to accumulation of noxious, incompletely oxidized compounds; in the lower horizons the yield is rather higher. This peculiarity of the Nosovka chernozems, decided by the works of Nosovka Experiment Station, finds full correspondence in the difference with which the biochemical processes proceed in the different horizons in the same way, passing through a well expressed minimum in the horizon underlying the arable one.

3. By introducing the culture of clover into the system of crop rotation, the productive capacity of the Nosovka chernozems is improved, which is particularly true of the horizon underlying the arable one. After clover, this horizon becomes free of its specific unfavorable properties. Our investigations have shown that accordingly the normal course of the development of biochemical processes is restored and a regular decrease in intensity of these processes with increase of depth is observed.

4. In comparing the data obtained from agrochemical study and the practice of field culture (observation on the yield of different horizons see pp. 1226—1227) with the results of our microbiological investigations, we may state the close parallelism existing on the one hand between the physical properties, the growth of plants and the microbiological activity of the soil, and its fertility on the other.

We see that in our case the changes of vital conditions in the soil have an identical effect both on plants and bacteria.

Thus, after applying the culture of clover, the physical properties of the soil are improved; this is followed by the acceleration of the microbiological activity and the growth of plants, and by the increase of the yielding capacity of the soil.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

НИЖНИЙ КЕМБРИЙ В ЗАКАВКАЗЬИ

Г. П. БАРСАНОВА

(*Представлено академиком* **Ф. Ю. Левинсон-Лессингом**)

Вопрос о палеозойских отложениях Кавказа уже с давних пор служил предметом дебатов между геологами работавшими по его исследованию. Наибольшее внимание исследователей в этом смысле направлялось на изучение возраста так наз. «сланцев Главного хребта», причем некоторые из них (Фавр, А. А. Иностранцев, Ф. Ю. Левинсон-Лессинг) считали сланцы палеозойскими, а другие (Абих, Траутшольд, В. П. Ренгартен, отчасти Ф. Ю. Левинсон-Лессинг и др.) относили их к мезозою. Сводная работа И. Г. Кузнецова,[1] посвященная подробному разбору и критическому сопоставлению всех данных по этому вопросу, разрешает его достаточно определенно в пользу признания за сланцами нижне-юрского (лейас, доггер) и отчасти даже мелового возраста. Таким образом, последние исследования, как-будто бы окончательно выключают эту группу пород из палеозойских свит Кавказа.

Кроме мезозойских «сланцев Главного хребта», в работах посвященных Кавказу неоднократно встречается упоминание о совершенно литологически отличных метаморфических сланцах, с зачастую зажатыми в них пачками известняков, причем вся свита относится исследователями всегда к палеозою.

Последнее не всегда базируется на палеонтологических находках, а часто решается лишь по условиям залегания и стратиграфическим взаимоотношениям. На северном склоне хребта подобные образования были опи-

[1] И. Г. Кузнецов. Некоторые соображения о стратиграфическом и тектоническом положении «сланцев Главного хребта» на Кавказе. Изв. Геол. ком., 1927, т. 45, № 3.

саны для бассейна р. Малки (А. П. Герасимов), причем отложения были охарактеризованы фауной верхнего кембрия в низах и верхнего силура — в верхах свиты. Аналогичные породы были отмечены и в бассейне р. Лабы (В. Н. Робинсон), причем автором выделяется здесь уже средний и верхний карбон, литологически представленный конгломератами, песчаниками, сланцами и характеризуемый пропластками каменного угля. Ближе к центральной части хребта сланцы такого же характера были встречены В. Н. Соловьевым в долине р. Ардона; но представляя из себя слабо метаморфизованную свиту, главным образом, хлоритовых сланцев и филлитов, палеонтологически они являются не охарактеризованными. Представляется интересным отмечаемое пронизывание свиты апофизами гранитного массива. Другой выход древних метаморфических сланцев отмечается Л. А. Варданянцем в верховьях р. Гизель-дона, где встречена и известковая фация охарактеризованная верхне-палеозойскими окаменелостями (*Littonia nobilis* Waag.), заставляющими относить данный горизонт свиты к нижней перми.

Что касается Закавказья, то здесь данные указывающие на нахождение метаморфических пород палеозоя еще более редки, а фаунистических характеристик почти не встречается.

Для южной части Закавказья, указания на палеозой встречаются в описаниях районов Джульфы и Зангезура (Л. К. Конюшевский). В последнем описываются глинисто-кварцитовые и кварцитовые породы с подчиненными известняками быть может представляющими верхние горизонты свиты. Вся свита тесно переплетена с интрузиями древних же эпидиабазовых пород. Известняки содержат фауну *Fusulina* sp., *Cribrostomum elegans* Möll, *Nodosinella* sp. и др., на основании чего относятся автором к карбону. Указывается на внедрение в эту свиту гранитовых жил. В районе более примыкающем к системе собственно Главного хребта древние метаморфические сланцы известны в районе Дзирульского гранитного массива (В. В. Богачев, Г. М. Смирнов). Свита представлена довольно разнообразной литологически группой пород, относившейся авторами условно к палеозою, так как до сих пор она не была палеонтологически охарактеризована ввиду отсутствия органических остатков.

Производя в 1929—1930 гг. по заданию Закавказской комиссии СОПС работы по исследованию Лопанского района АО Юго-Осетии, захватывающего крайнюю восточную часть Дзирульского гранитного массива,

нашей экспедиции также пришлось столкнуться с указанной выше свитой метаморфических сланцев. Производя геохимическое и геологическое изучение одного из месторождений мрамора, представляющего из себя известковую фацию той же метаморфической свиты с наложившимися на него гораздо позже процессами контактметаморфизма, нами была найдена в скарновой зоне довольно хорошо сохранившаяся окаменелость. Несколько позднее в том же месте, немногочисленная фауна худшей сохранности была собрана И. Г. Кузнецовым, посетившим район наших работ. Благодаря любезности заведующего Крымско-Кавказской секцией Института геологической карты И. Г. Кузнецова заинтересовавшегося находкой, последняя вместе с фауной собранной им, была передана на определение А. Г. Вологдину, которым и была любезно определена как *Coscinocyathus caucasicus* sp. nova. На основании этого, а также и просмотра фауны И. Г. Кузнецова, в которой оказались также и представители *Archaeocyathus*, А. Г. Вологдин считает возможным отнести указанные мраморы к верхам нижнего кембрия. Ввиду большого интереса, который могут представлять эти отложения для геологии кавказского палеозоя, не лишним будет в кратких чертах охарактеризовать свиту метаморфических сланцев с точки зрения литологии и тектонических взаимоотношений.

Обнажаясь в центральной части крупной антиклинали, геологически характеризующей весь исследованный район и продолжающейся далее к западу в Дзирули, сланцы идут не широкой полосой простирания СВ—ЮЗ, составляя наряду с гранитами в которых они зажаты, ядро упомянутой выше складки. С северного края на них налегает мощный мезозойский сланцевый и порфиритовый комплекс нижней и средней юры, дислоцированный, вследствие надвигания на жесткий сланцево-гранитовый барьер, в мелкие опрокинутые складки с разломами. Некоторое нарушение в залегании обнаруживается и внутри самой сланцевой свиты, причем увеличение угла падения приурочено к выходу серпентиновой интрузии прорывающей сланцы и вероятно несколько их приподнимающей. Элементы залегания замеренные в нескольких обнажениях, дают общее направление падения СЗ α 320—330° с меняющимися углами от 50 до 70—80° вблизи выхода серпентина.

Отдельные части сланцевой свиты представлены весьма пестрой литологически серией, с представителямми филлитов, глинисто-серицитовых, серицитовых, хлоритовых, тальковых и др. сланцев этих же групп. Как

общую особенность пород этого комплекса отметим чрезвычайную мелкозернистость и зачастую неполную перекристаллизацию первоначального субстрата, выражающиеся в обязательном присутствии глинистых частиц. Но всетаки общая метаморфизованность видна уже и при первом взгляде, давая по плоскостям тонкой сланцеватости характерные серебристо-серые поверхности обусловленные послойным расположением листочков серицита. Различные горизонты повидимому в разной степени подверглись воздействию регионального метаморфизма, чем и следует быть может объяснять присутствие слабо метаморфизованных, почти глинистых сланцев, наряду с представителями полного метаморфизма — слюдяными сланцами. Вся свита густо пересечена аплитовыми интрузивными жилами (краевая часть массива), впоследствии подвергнувшимися динамическим воздействиям, давшим в результате превращение части из них в милониты. Относительное разнообразие пород этой свиты следует отчасти также отнести за счет воздействия кислых и основных интрузий (альбитизация, оталькование), а также и за счет вероятных фациальных изменений в свите, наиболее резко выражающихся в появлении пачек мрамора и фаций богатых органическим пигментом, метаморфизованных затем в подобие графититовых сланцев. Интересно отметить, что в долине р. Чорат-Хеви, обнажающей более глубокие горизонты гранитного массива, сланцевая свита значительно менее мощна чем по долине р. Лопанис-Цхали, представляющей в разрезе его верхние краевые части. Создается впечатление, что указанные сланцы являются кровлей гранитного массива частью ассимилированной им в более глубоких горизонтах.

Что касается возраста самих гранитов исследованного нами района, то они несомненно моложе сланцев нижнего кембрия, а по типу своему приближаются к биотитовым микроклино-ортоклазовым розовым гранитам («каледонским» А. П. Герасимова), возраст которых для Кавказа вообще определяется не моложе верхнего силура.[1] Указанная аналогия подчеркивается в нашем районе наличием серпентинов и габбро, обычно связанных с полосой гранитов указанного типа.

Резюмируя приведенный выше фактический и литературный материал, необходимо отметить, что находимые на северном Кавказе свиты палеозойских сланцев несомненно аналогичны наблюдаемой в Лопанском и Дзируль-

[1] А. П. Герасимов. Обзор современных данных по геологии северного Кавказа. Изв. Геол. ком., 1928, т. 47, № 4.

ском районах. Особенно ярко бросается в глаза аналогия со свитой Карачая, содержащей также мраморы и пронизанной апофизами гранитной магмы (П. И. Лебедев, В. Н. Робинсон, И. И. Никшич). Изучавшаяся нами свита пока является наиболее древней для Кавказа палеонтологически охарактеризованной. Она замыкает, таким образом, уже и сейчас довольно полно намечающийся по отдельным районам разрез палеозоя. Но даже и в изученном нами случае является несомненным, что известняки не представляют самый нижний горизонт свиты, а имеются породы — те же сланцы, их подстилающие и относящиеся быть может к самым низам кембрия, позволяя таким образом наметить для палеозоя Кавказа самые нижние его горизонты.

Минералог. музей Акад. Наук СССР
Ленинград 1 VI 1931.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931.
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

О ХАРАКТЕРЕ НЕКОТОРЫХ ЧЕТВЕРТИЧНЫХ ОТЛОЖЕНИЙ СЕВЕРО-ВОСТОКА АЗИИ

А. И. ЗУБКОВА

(*Представлено* Ботаническим музеем)

При описании четвертичных отложений северо-востока Азии исследователи природы этого края отмечают своеобразные илистые образования. Воллосович, в районе рр. Индигирки и Алазеи, описывает тонкозернистые илистые наносы с остатками травянистой и древесной растительности (Воллосович, 1930). Широким распространением подобного рода отложения пользуются в Анадырском крае; они описаны Полевым как иловатые тонкозернистые образования, напоминающие лесс. Эти же самые отложения В. Б. Сочава наблюдал также в Анадырском крае и в бассейне р. Пенжины (В. Б. Сочава, 1930). Природа этих отложений различными исследователями объясняется различно, а последнее время тонкозернистые илистые отложения Анадырского края считаются лессовидными породами, возникшими в сухой и теплый климатический период, в одну из послеледниковых эпох (Берг, 1931). Моей задачей и является рассмотрение характера тонкозернистых илистых отложений Анадырского края и бассейна р. Пенжины по материалам, собранным В. Б. Сочавой в бассейне р. Пенжины в 1930 г.

Полевой в своей работе «Анадырский край» дает следующую схему геоморфологических областей северо-востока Азии: 1) система Камчатки, 2) центральная депрессия, 3) система Станового хребта и 4) арктический склон.

Анадырский край и бассейн р. Пенжины большей своей частью принадлежит к области центральной депрессии, где четвертичные отложения покрывают значительные пространства. Область центральной депрессии представляет обширное понижение, простирающееся от берегов Охотского

моря до берегов Берингова и в значительной своей части орошаемое двумя речными системами рр. Анадыря и Пенжины. Рельеф центральной депрессии имеет большое разнообразие, представляя то холмистое плато с отдельными группами гор, то низкую тундровую равнину с многочисленными озерами (Полевой, 1915). Эта равнина и является областью наибольшего развития четвертичных отложений, среди которых видное место по своему распространению занимают иловатые тонкозернистые образования, выходящие в береговых обнажениях р. Анадыря и его бассейна, подстилая тундровый покров.

По Полевому, тонкозернистые иловатые отложения, напоминающие лесс, появляются всюду в речных террасах р. Анадыря, там, где река течет среди тундры. Эти отложения подобно лессу образуют отвесные стены от 2—4 м высоты и более. Толща иловатых отложений скована мерзлотой и при оттаивании имеет способность расплываться. Отдельные бугры этих отложений часто встречаются среди разработанных речных долин. Иловатые отложения прикрыты по поверхности тонким почвенным покровом, а иногда торфяником. Среди илистых образований, представляющих тончайший продукт разрушения горных пород, перемешанный с растительными остатками, появляется почвенный лед (Полевой, 1915).

Описанное В. Б. Сочавой обнажение иловатых образований в нижнем течении Оклана (правый приток р. Пенжины) имеет такой же характер, как только что приведенное обнажение по р. Анадырю. Мерзлые влажные слои иловатых отложений, подмываемые водой, представляют совершенно отвесную стену около 8 м высоты. Илистая толща содержит большое количество растительных остатков, иногда древесину, а местами незначительной мощности торфяные прослойки. При оттаивании, под влиянием солнечных лучей, с обнажения сплывает в реку грязеобразная масса, скрывающая стратиграфию обнажения. Среди породы встречается почвенный лед в виде кристаллов и прослоек, а также воронок до 2 м ширины на контакте с почвенным слоем. Этот тип почвенного льда — обычное явление для района и, по мнению В. Б. Сочава, — современного происхождения. Иловатые отложения прикрыты сверху сильно оглеенным глинистым горизонтом с торфяным слоем в 3 см, на котором развит растительный покров кочковато-болотистой тундры (В. Б. Сочава).

Взятые В. Б. Сочавой из обнажения с глубины 1 — 3 м два образца отложений представляют типичные торфянистые илы сероватого цвета,

темнеющие на воздухе. Минерально-илистая основа отложений перемешана с растительными остатками в виде веточек древесины диаметром до 1.5 см и фрагментов тканей различных видов растений. Микроскопический анализ ила показывает, что в образовании его принимает участие 50—55% минеральных частиц, остальная же часть падает на растительный детрит и фитозоопланктон. В промытом иле через сито 0.3 мм минеральных частиц крупностью более 0.3 мм остается 5—8%, растительных же остатков — 90—95%, среди которых главную роль играют следующие: *Betula* sp., фрагменты коры и ткани, *Populus* sp. — веточки диаметром 2—3 см., *Salix* sp. — веточки и ткань, *Carex* sp. — корешки, *Equisetum* sp. — обрывки ткани, *Sphagnum* из секции *Cuspidata* — фрагменты веточных листьев, *Menyanthes trifoliata* — семя; кроме того довольно много встречается мелкого растительного детрита.

Диатомовая флора отложений, любезно определенная В. С. Порецким, имеет следующий видовой состав (см. стр. 1264).

Всего в двух образцах определено 30 видов диатомей, относящихся главным образом к пресноводным и пресноводно-соленоводным формам; количественное содержание их выражается следующими цифрами:

Образцы	Всего видов	Пресноводн.	Пресн.-сол.	Соленоводных
№ 1	18	11 (61%)	6 (30%)	1 (6%)
№ 2	23	15 (65 »)	7 (31 »)	1 (4 »)

Как видно из этой таблички, диатомовая флора иловатых отложений носит пресноводный характер, так как преобладающими формами являются пресноводные диатомеи. Довольно значительный процент дают ничего не говорящие нам пресноводно-соленоводные диатомеи, встречающиеся как в пресных, так и в соленых бассейнах. Соленоводным формам, найденным лишь по одному виду в образце, едва ли можно придавать какое-либо значение.

Таким образом, экологический состав диатомовых водорослей, судя по преобладанию пресноводных форм, свидетельствует о пресноводном характере водоемов, где происходило отложение ила; что же касается флористического состава, то здесь мы имеем обычные виды северных водоемов.

Итак, иловатые отложения, как показывает анализ, суть образования лимнические, сильно минерализованные и перемешанные с растительными остатками. Растительные остатки являются несомненно аллохтонными, попавшими в водоем извне, в процессе размывания прибрежных частей, или быть может принесены водосборной сетью.

	Название вида	Встречаемость		Экология
		Обр. № 1	Обр. № 2	
1	*Fragillaria pinnata* v. *elliptica* (Sch.) Coid.	sh.	ss.	Пресноводная
2	*Eunotia arcus* E.	ss.	—	»
3	» *pectinalis* v. *minor* Gr.	s.	ss.	»
4	» *alpina* (Naeg.) Gr.	—	ss.	»
5	» *praerupta* v. *laticeps* (E.) Gr. .	h.	h.	»
6	» » v. *bidens* (E.) Gr. . .	—	ss.	»
7	» *lunaris* (E.) Gr.	s.	—	»
8	» *sudetica* (O. M.) Hust.	s.	ss.	»
9	» *veneris* (Ktz.) Migula	s.	—	»
10	*Cocconeis placentula* E.	ss.	—	Пресновод.-соленовод.
11	*Diploneis parma* Cl.	ss.	ss.	Пресноводная
12	*Navicula mutica* Ktz.	ss.	—	Соленоводная
13	» *mutica* f. *Cohpii* Hilt? . . .	—	s.	»
14	» *arenicola* Gr.	ss.	—	Пресновод.-соленовод.
15	» *seminula* Gr.	—	s.	»
16	» *mutica* f. *Goeppertiana?* . .	—	s.	»
17	*Pinnularia borealis* E.	sh.	h.	Пресноводная
18	» *intermedia* Lagst.?	—	ss.	»
19	» *isostauron* (E.) Gr.	—	s.	»
20	» *lata* v. *minor* Gr.	—	ss.	»
21	» *microstauron* E.	—	ss.	»
22	» *viridis* v. *intermedia* Cl. . .	hs.	ss.	»
23	» » v. *fallax* Cl.	—	s.	»
24	*Gomphonema angustatum* v. *producta* (Ktz.) Gr.	ss.	ss.	»
25	*Gomphonema consp.* v. *capitata* E. . .	ss.	—	»
26	*Cymbella ventricosa* Ktz.	ss.	ss.	Пресновод.-соленовод.
27	*Amphora ovalis* Ktz.	ss.	—	»
28	*Hantzschia amphyoxis* Gr.	h.	h.	»
29	*Epithemia zebra* v. *saxonica* Gr. . . .	—	ss.	»
30	*Nitzschia palea* W. Sh.	—	ss.	»

Как уже говорилось выше, различные исследователи придерживаются различных точек зрения на происхождение иловатых отложений. Brooks считает илистые образования субаэральным скоплением частью разрушенного растительного материала, частью отлагавшегося во время дождей ила (Brooks, 1906). По Moffit'у эти отложения — осадочного происхождения, образовавшиеся в пресноводных бассейнах или в море во время опускания суши (цитировано по Полевому). Полевой приводит еще мнение (без указания автора), которое рассматривает ил как тончайшую муку горных пород, слагающую поддонную морену. По мнению Полевого «в образовании ила существенную роль сыграла вода болотных речек и особенно лайд и озер при условиях спокойного отстаивания и осаждения тонкого взвешенного материала» (Полевой, 1915). Таким образом, Moffit и Полевой рассматривали илистые отложения как водные образования, но Moffit допускал как пресноводный, так и морской характер бассейна; последнее предположение не подтверждается составом диатомовой флоры.[1]

Наконец, Л. С. Берг склонен отнести торфяно-илистые отложения к лессовидным породам, обязанным своим возникновением сухому и теплому климатическому периоду (Берг, 1931). Такое предположение конечно не противоречит тому факту, что эти отложения являются водными, так как лессовидные породы могут возникать на любой материнской породе, в результате процесса выветривания и почвообразования в условиях сухого климата (Берг, 1916, 1922, 1926, 1931). Таким образом, если исходить из точки зрения Л. С. Берга, вышедшие из-под воды торфяно-илистые отложения приобрели свою «лессовидность» лишь только под влиянием сухого и теплого климата; но почему тогда растительные остатки не подверглись этому влиянию? Ведь сухой и теплый климат (надо полагать, что если был, то не пустынный) придал бы этим отложениям облик близкий к черноземам, т. е. растительные остатки подверглись бы сильнейшей степени гумификации и разрушению в результате процесса почвообразования и выветривания, чего в действительности мы не наблюдаем. Считать же торфяно-илистые отложения лессовидными породами только потому, что в них содержится до 40% минеральных частиц крупностью меньше 0.3 мм, нет оснований, так как тогда пришлось бы современные озерные, сильно

[1] Возможно, что возникновение водоемов и было связано с постплиоценовой морской трансгрессией, впоследствии же наступило опреснение этих водоемов; вопрос этот довольно сложный, и решение его требует изучения геоморфологии района и стратиграфии четвертичных наносов.

минерализованные, торфянистые илы отнести к лессовидным породам, продукту теплого и сухого климата. Мне кажется, что Л. С. Берг, считая торфянисто-илистые отложения лессовидными, исходил лишь из того соображения, что Полевой при описании сделал сравнение их с лессом. Но ведь не все то, что напоминает лесс по внешности, есть лесс по своему образованию. Поэтому тонкозернистые илистые образования, как показывает анализ, можно рассматривать лишь как торфяно-илистые водные отложения. Климатические условия, в которых происходило их образование, не отличались от современных, судя по флористическому составу растительных остатков. Полевой, по находкам в этих отложениях костей мамонта (*Elephas primigenius*), относит ил к образованиям эпохи современной мамонту, а, как известно, растительность в эпоху мамонта мало чем отличалась от современной, так что такая датировка возраста торфяно-илистых отложений вполне соответствует и составу найденных растительных остатков.

ВЫВОДЫ

1) Тонкозернистые илистые отложения бассейна р. Пенжины и Анадырского края — отложения водные. Состав диатомовой флоры указывает на пресноводный характер бассейнов, в которых происходило их образование.

2) По своему характеру эти отложения относятся к группе торфянистых илов, содержащих растительные остатки (главным образом наземной растительности), перемытые с лимническими отложениями в виде остатков фитозоопланктона и минеральных частиц. По механическому составу ничего общего с лессовидными породами не имеют.

3) Состав растительных остатков торфяно-илистых отложений свидетельствует о климатических условиях, не отличавшихся от современных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Берг Л. С. О происхождении лесса. Изв. Русск. геогр. общ., 1916, т. 52. — 2. Idem. Климат и жизнь. М. 1922. — 3. Idem. О почвенной теории образования лесса. Изв. Геогр. инст., Л. 1926, вып. 6. — 4. Idem. Ландшафтно-географические зоны СССР. Сельхозгиз, М.-Л. 1931. — 5. Воллосович К. А. Геологические наблюдения в тундре между нижними течениями рек Лены и Колымы. Ленско-Колымская экспедиция 1909 г. Тр. Ком. изуч. ЯАССР, Л. 1930, т. XV. — 6. Полевой П. И. Анадырский край. Главнейшие результаты Анадырской экспедиции. Тр. Геол. ком., нов. сер., П. 1915, вып. 140. — 7. Brooks A. H. The geography and geology of Alaska. U. S. Geol. Survey, Professional Paper, № 45, W. 1906. — 8. Soczawa V. Das Anadyrgebiet. Botanisch-geographische Beobachtungen im äussersten Nordosten Asiens. Ztschr. Ges. f. Erdk., B. 1930, № 7/8.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS

Classe des sciences mathématiques et naturelles

Отделение математических и естественных наук

DESCRIPTION OF A NEW SILUROID FISH, *GLYPTOSTERNUM KURDISTANICUM*, FROM THE BASIN OF THE TIGRIS RIVER

By L. BERG

Syria and the basin of the Euphrates and Tigris constitute a westernmost limit of the range of the family Sisoridae. There were known only two species belonging to that family, namely *Glyptosternum steindachneri* and *G. armeniacum*, which inhabit the Tigris and Euphrates basin. Now I am able to add a third species, *G. kurdistanicum*. In accordance with Günther (1864), Regan (1905, 1911, 1923) and Norman (1925)[1] the name *Glyptosternum* McClelland 1842 is used here for species with an adhesive apparatus on the chest and with wide gill openings. I do not follow the proposition of Hora (1923)[2] to change the name *Glyptosternum* for *Glyptothorax* Blyth 1860 and to use *Glyptosternum* for species referred until recently to the genus *Exostoma* Blyth 1860 and allied. I give here a review of all the known species of *Glyptosternum* from the Euphrates and Tigris. They all belong to the section with pectoral spine and one or more outer ventral rays plaited below (for Indian species of this section see Hora, 1923, p. 12). Adhesive apparatus large.

1. **Glyptosternum kurdistanicum** Berg, n. sp. (fig. 1, 2)

D I 7, *A* II 9, *P* I 7. Adhesive apparatus (fig. 1) broader than long; its lateral branches not pinnate (in *G. armeniacum* they are pinnate, fig. 6), but with plaits converging to the deepest point of the breast. Adipose fin short, much shorter than interspace between dorsal and adipose. Longest

[1] J. R. Norman. Ann. Mag. Nat. Hist. (9), XV, 1925, pp. 570—575.

[2] S. L. Hora. On the composite genus Glyptosternon McClelland. Records Ind. Mus., XXV, 1923, pp. 1—44.

ray of dorsal fin shorter than depth of body. Origin of dorsal almost equidistant from tip of snout and origin of adipose. Head almost as long as broad. Caudal peduncle high, least depth of body equalling 81 % of the length of the caudal peduncle (to the last vertebra). Nasal barbels reaching the middle of eye, maxillary ones reaching beyond the origin of the pectoral fin. Width of mouth (measured at its inner corners) 2.4 in length of head. The patch of teeth on the upper jaw crescent-shaped (with well developed lateral rami).[1]



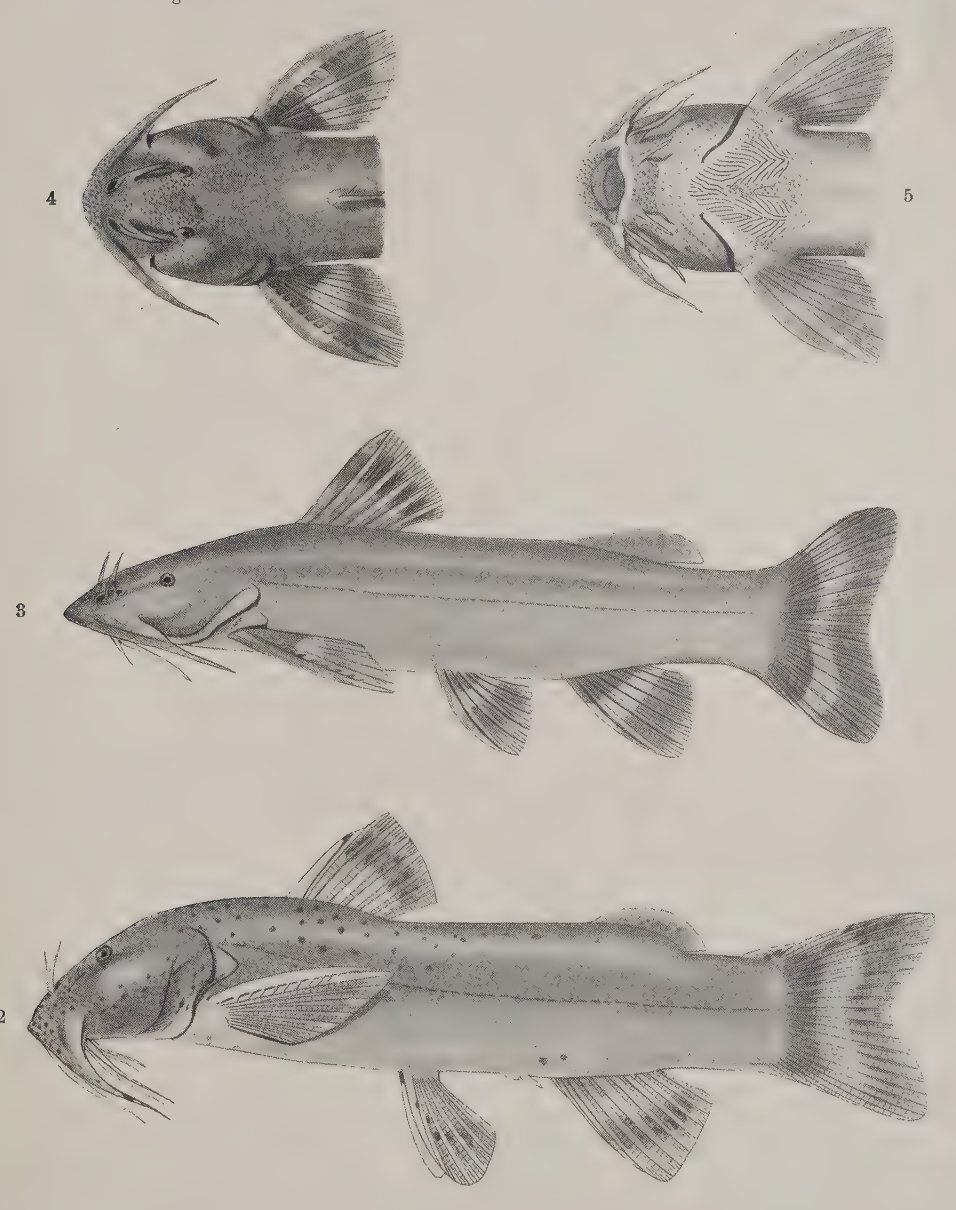
Fig. 1. *Glyptosternum kurdistanicum.* № 20780. Head from below. × 2.

The upper surface of the first pectoral ray is covered (under the skin) with oblique osseous striae. Grey with small round black spots on sides. All fins with broad black bars.

Measurements in mm: Total length 140, length to last vertebra 115, length of head $31^1/_2$, width of head 26, depth of body 21, least depth of body 17, length of caudal peduncle (to last vertebra) 21, width of the mouth opening 13, snout 15, interorbital space $7^1/_2$, longitudinal diameter of eye $3^1/_2$, antedorsal space 44, between end of dorsal and origin of adipose 32, from the origin of *D* to that of the adipose 46, length of dorsal $15^1/_3$, length of adipose 15, length of pectoral 27, distance between origin of *P* and that of *V* $31^1/_2$, height of dorsal $18^1/_2$, length of the longest ray of caudal $23^1/_2$.

[1] As in *dorsalis* Vinc., cf. fig. 1 in Hora, 1923, p. 9.

L. Berg. Description of a new siluroid fish, *Glyptosternum kurdistanicum*, from the basin of the Tigris river



A single adult male (№ 20780, Museum of Zoology, Academy of Sciences), 140 mm in total length, caught by P. V. Nesterov, July 10 (old style: June 27) 1914 in Kurdistan, at the village Germau (or Germav), at the height of 1500 m, during the works of the Turko-Persian delimitation commission. Germau (or Germav, Germaw) is situated in latitude 36° N south-east of Serdesht, on the western slope of the Sur-kei Range, in the basin of the river Bané, tributary to the Little Zab, which is tributary to the Tigris R. At the same locality many salamander-like newts, *Neurergus crocatus* Cope, were found.

Allied to *Glyptosternum brevipinne* (Hora) (*Glyptothorax brevipinnis* Hora. Records Indian Mus., XXV, 1923, p. 16, pl. I, fig. 4) from a unknown locality. In *brevipinne* the caudal peduncle is lower and longer, the dorsal fin is placed considerably nearer to the tip of snout than to the origin of the adipose fin, the nasal barbels do not reach the eye.

2. Glyptosternum steindachneri Pietschmann.

Anz. Akad. Wien, math.-naturw. Kl., Bd. 50, 1913, März, p. 93.

D II 6, *A* II 9, *P* I 8. Differs from *G. kurdistanicum* in the long adipose fin, its base being larger than the interspace between dorsal and adipose, and in narrow mouth, its width being contained in length of head 4.2—4.3. The adhesive apparatus not described. Head comparatively narrow, its width contained 1.5—1.6 times in its length. The nasal barbel reaching a little behind the half distance between its origin and anterior margin of eye. The maxillary barbel reaching about the middle of the pectoral spine. The dorsal fin somewhat less high than the depth of body. Two specimens, 189 and 150 mm in total length, from Mosul (Tigris). Not seen by me.

3. Glyptosternum armeniacum Berg (fig. 3—6)

Bull. du Musée du Caucase, XI, livr. 3—4. Tiflis, 1918, p. 146, 148.

D II 6, *A* III 6—7, *P* I 8, *V* I 5. Adhesive apparatus longer than broad; its lateral branches with pinnate plaits (figs. 5 and 6). Nasal barbels in some reaching the anterior margin of eye, in others reaching the posterior one. Patch of teeth on the upper jaw not broad nor deep, almost straight (slightly curved). Minute cutaneous tubercules on the upper surface of the pectoral spine; no oblique osseous striae under the skin of the pectoral

spine. Otherwise as *G. kurdistanicum*. Only type specimens known: № 20806 (Museum of Zoology, Academy of Sciences), four specimens, 75—125 mm in total length, taken by A. L. Behning on August 15 (old style 2), 1916, «in the river Mukhlassi darasi, head waters of Euphrates, beneath Chat, 42 km SE from Erzeroum», as stated on the label. But on the map 1 : 420000 I do not find the above mentioned localities on the head waters of Euphrates. The distance of 42 km SE from Erzeroum leads us in the basin of the upper Araxes, in the vicinity of village Chatagh on a river, on which is situated another village named Mollah Ahmed, so that the river may bear the name of Mollahsi (Mullasi) darasi, i. e. Mollah River. It is not improbable that *G. armeniacum* was taken in the head waters of the Araxes.



Fig. 6. *Glyptosternum armeniacum* Berg. № 20806. Adhesive apparatus. × 2.

EXPLICATIONS OF PLATE

2. *Glyptosternum kurdistanicum* Berg. № 20780. Nat. size.
3. *Glyptosternum armeniacum* Berg. № 20806. Nat. size.
4. Idem № 20806. Head from above.
5. Idem № 20806. Head from below.

Л. С. БЕРГ. ОПИСАНИЕ НОВОГО СОМИКА, *GLYPTOSTERNUM KURDISTANICUM* ИЗ БАССЕЙНА РЕКИ ТИГРА

Glyptosternum kurdistanicum Berg, n. sp. Ширина присасывательного аппарата на груди больше его длины; боковые ветви его не перисты, а сходятся к центральному пункту присоски (фиг. 1). Близок к *Gl. brevipinne* (Hora) 1923, местонахождение коего неизвестно, но отличается более высоким хвостовым стебельком и более отодвинутым кзади спинным плавником. 1 экз. длиною 140 мм (№ 20780), добытый П. В. Нестеровым 10 VII (27 VI) 1914, у деревни Гермау или Гермав, в бассейне р. Бане, впадающей в Малый Заб, приток Тигра.

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР. 1931
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Classe des sciences mathématiques et naturelles
Отделение математических и естественных наук

DESCRIPTION OF A NEW GOBIOID FISH, *KNIPOWITSCHIA ILJINI*, FROM THE CASPIAN SEA

By L. BERG

The genus *Knipowitschia* (fam. *Gobiidae*) was established by B. S. Iljin (Rep. Astrakhan Fishery Station, VI, № 3, 1928, p. 43, 47) for a small goby, *Gobius longicaudatus* Kessler 1877 var. a and var. b,[1] occurring in the Caspian and Azov seas, as well as in the liman (estuary) of the Dniepr and Bug.[2] *Knipowitschia* is characterized as follows: Allied to *Pomatoschistus* Gill, but the anterior interorbital pore (λ) of the slime canal system absent, the anterior pores σ lying between the fore parts of eyes, no supraopercular canal, pores ω, β and δ absent. Head and back, as far behind as origin of the second dorsal, naked.

In the following a description is given of the second species from the same genus:

Knipowitschia iljini Berg, n. sp.

D VI, I 8—9; *A* I 8—9 (10), squ. 33—35. No small straight canal going backward from the joining point of the orbital mucous canals. Caudal fin rounded, symmetrical. Body with many dark vertical cross bands. The above mentioned features distinguish the new species from *K. longicaudata*.

Mouth oblique, the lower jaw slightly projecting. Teeth villiform, no canines. Tongue truncated anteriorly. Interorbital space narrower than eye, flat. Scales ctenoid; belly, head and back backwards to the second dorsal

[1] *Gobius longicaudatus* Kessler 1877 var. c.=*Hyrcanogobius bergi* Iljin 1928, l. c.

[2] To the same genus may belong, as Iljin supposes, *Gobius canestrinii* Ninni 1882 from Venice and Spalato.

naked. The upper pectoral rays without free tips. Dorsals well separated. Subocular series of genipores (*a*) present. Vertical subocular series of genipores usually 6.

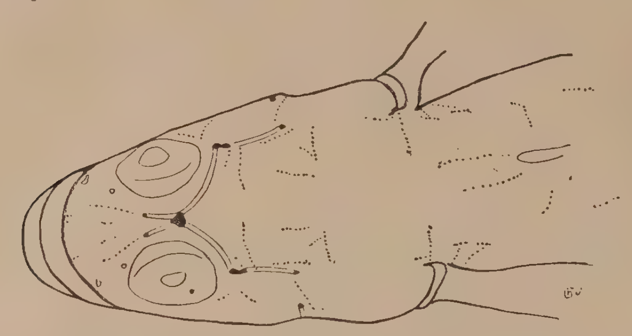


Fig. 1. *Knipowitschia iljini.* Slime canals and genipores (figure by B. S. Iljin).

Males. Coloration darker. Back and sides with distinct cross bars. Fins darker than in ♀. Anal with a dark band along the lower margin. Dorsals with dark bands. In adults rays of the first dorsal with free tips.

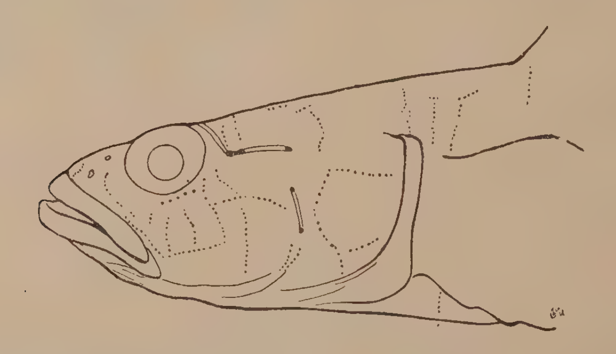
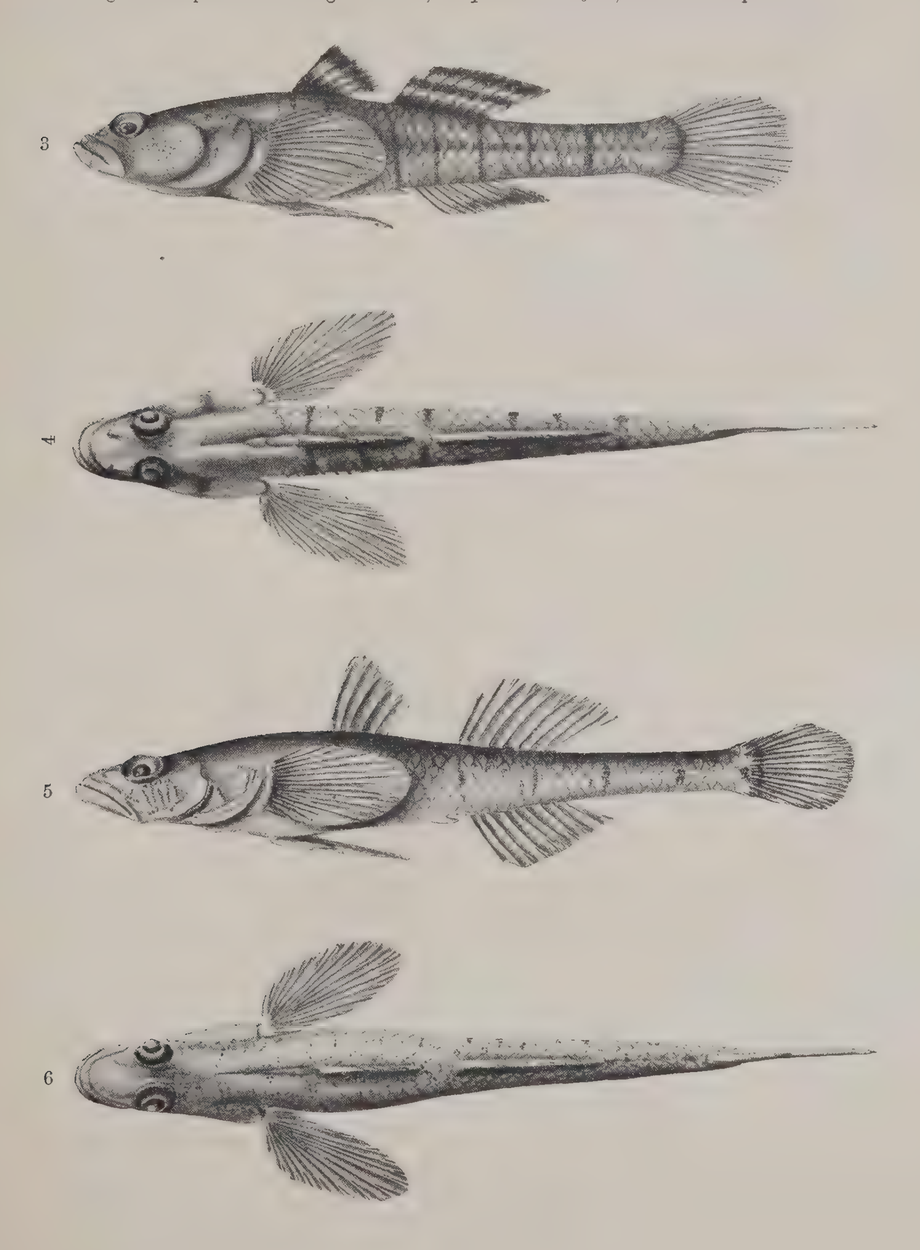


Fig. 2. *Knipowitschia iljini.* Slime canals and genipores (figure by B. S. Iljin).

Usually a dark spot at the hind margin of the dorsal. Ventrals reaching the genital papilla. Genital papilla acute.

Females. Coloration paler. Back and anterior part of sides with small dark spots irregularly sparsed. Posterior part of sides with indistinct cross bands. Fins without bands. Genital papilla distally bifurcated. Ventrals not

L. Berg. Description of a new gobioid fish, *Knipowitschia iljini*, from the Caspian Sea



reaching the vent. Caudal peduncle more slender, snout more produced, than in male.

Total length 47 mm.

Many specimens caught by Prof. N. M. Knipowitsch on board «Abo» in the middle part of the Caspian Sea, April, 1913, June 23, 1913 (№ 22052 Zool. Mus. Acad. Sc.), and June 14, 1913.

MEASUREMENTS, mm (№ 22052)

	♂	♂	♀	♀
Length to end of vertebral column	36	35	38 1/2	36 1/2
Length of head	10 3/4	10 3/4	12	10 1/3
Diameter of eye	2	2	2 1/4	2 1/4
Greatest depth of body	6 3/4	6	7 1/2	5 3/4
Least depth of body	2 3/4	3	3	2 1/3
Length of caudal peduncle	10 1/2	9	10	10
Length of ventrals	8	8	7	9
Length of snout	—	3	3 1/2	3

Named for B. S. Iljin, Moscow, who investigated the gobioid fishes of the Black and Caspian Seas.

EXPLICATIONS OF PLATE

Fig. 3. *Knipowitschia iljini*. Male. Caspian sea (station № 110, 1913). Nat. size 41 mm.
Fig. 4. *Knipowitschia iljini*. Male. Caspian sea (station № 165, June 23, 1913, № 22052). Mat. size 46.
Fig. 5. *Knipowitschia iljini*. Female. Caspian sea (station № 146, June 14, 1913). Nat. size 44 1/2 mm.
Fig. 6. *Knipowitschia iljini*. Female. Caspian Sea (station № 165, June 23, 1913, № 22052). Nat. size 45 1/2 mm.

Л. С. БЕРГ. ОПИСАНИЕ НОВОГО БЫЧКА ИЗ КАСПИЙСКОГО МОРЯ, *KNIPOWITSCHIA ILJINI*

Род *Knipowitschia* установлен Б. С. Ильиным (1928) для *Gobius longicaudatus* Kessler 1877 var. a и b из Каспийского, Азовского и Черного морей. К этому же роду Б. С. Ильин предположительно относит *Gobius canestrinii* Ninni 1882 из Адриатического моря. Третий вид, *K. iljini* Berg, n. sp. был обнаружен экспедицией Н. М. Книповича в средней части Каспийского моря. Диагноз этого вида таков: *D* VI, I 8; *A* I 8, squ. 33—35. Нет слизистого канала, тянущегося назад от места схождения орбитальных каналов. Хвостовой плавник закругленный, симметричный. Длина до 47 мм.

Оглавление — Sommaire

Заглавие, отмеченное звездочкой, является переводом заглавия оригинала.
Le titre marqué d'un astérisque est une traduction du titre original.

Цена 2 руб. 50 коп.